

Transformaciones *Black Top-Hat* y *Hit-or-Miss* borrosas y sus aplicaciones

Pedro BIBILONI, Manuel GONZÁLEZ-HIDALGO, Sebastia MASSANET,
Arnau MIR y Daniel RUIZ-AGUILERA ¹

Soft Computing, Procesamiento de Imágenes y Agregación (SCOPIA)
Universitat de les Illes Balears, Dept. Matemàtiques i Informàtica
Crta. Valldemossa km. 7.5, Palma, España

Resumen. En este trabajo se presentan las transformaciones *Black Top-Hat* y *Hit-or-Miss* definidas dentro de la morfología matemática borrosa. Estas transformaciones han sido estudiadas en profundidad verificándose propiedades importantes desde el punto de vista teórico y aplicado. Ambas transformaciones han demostrado ser útiles en diversas aplicaciones al tratamiento de imágenes en niveles de gris, y color dentro del paradigma de la *Soft Color Morphology*, obteniendo resultados competitivos con respecto al estado del arte.

Keywords. Soft Computing, Morfología Matemática Borrosa, Soft Color Morphology, Black Top-Hat borroso, Hit-or-Miss borroso, Conjunciones borrosas, Funciones de Implicación borrosas

1. Introducción

En los últimos años se han utilizado técnicas de *Soft Computing* y, en particular, la morfología matemática borrosa, para hacer frente a la incertidumbre que típicamente se encuentra presente en las imágenes en todas sus etapas, desde su captura hasta su procesamiento en bajo o alto nivel, proporcionando resultados comparables e incluso superando en algunos casos al estado del arte. El paradigma de la morfología matemática borrosa se basa en el uso de operadores morfológicos borrosos construidos utilizando conjunciones [3] y funciones de implicación borrosas [1]. A partir de los cuatro operadores básicos: la dilatación borrosa, la erosión borrosa, el cierre borroso y la apertura borrosa, se pueden definir operadores más complejos. De importancia primordial son las transformaciones *Black Top-Hat* y *Hit-or-Miss* borrosas. La transformación *Black Top-Hat* borrosa extrae las estructuras oscuras completamente eliminadas por el cierre borroso, contrastándolas con respecto al fondo. Por otro lado, el transformación *Hit-or-Miss* borrosa puede usarse para encontrar en una imagen patrones con una forma y un tamaño preestablecidos proporcionando en cada ubicación el grado de similitud con el patrón que se trata de localizar.

Ambos operadores, además de tener una sólida base teórica, ya han sido utilizados con éxito recientemente en varias aplicaciones. En [4], se han propuesto dos detectores

¹E-mail: {p.bibiloni, manuel.gonzalez, s.massanet, arnau.mir, daniel.ruiz}@uib.es

de objetos curvilíneos de propósito general basados en los operadores mencionados. Estos detectores pueden servir como base para aplicaciones donde se necesiten detectar objetos curvilíneos específicos, ya que pueden ser personalizados dependiendo, entre otros parámetros, de la anchura de los objetos de interés. Esta capacidad para detectar objetos curvilíneos hace que la transformación *Black Top-Hat* borrosa sea muy apropiada para segmentar los vasos sanguíneos en imágenes de la retina. Esta segmentación es el primer paso hacia un diagnóstico automático y un estudio en profundidad de las imágenes de retina para ayudar al diagnóstico oftalmológico. Los vasos sanguíneos, que se caracterizan por ser regiones largas y estrechas, más oscuras que su fondo, son mejorados y resaltados a través de un algoritmo basado en la transformación *Black Top-Hat* borrosa que presenta buenas medidas de rendimiento y una respuesta en tiempo real [5].

Otra aplicación de este operador es la reducción del ruido en las imágenes dermatoscópicas para el diagnóstico y clasificación de lesiones cutáneas. La presencia de burbujas causadas por el fluido de inmersión y de vello corporal en dichas imágenes, puede dificultar el diagnóstico. Dado que los colores son una de las características más importantes de estas imágenes, se ha introducido en [7] un nuevo paradigma de morfología matemática borrosa, denominada *Soft Color Morphology*, capaz de trabajar con imágenes en color. Utilizando los operadores de la *Soft Color Morphology* y, en particular, el operador *soft Black Top-Hat*, se ha presentado un algoritmo efectivo de eliminación de vello para imágenes dermatoscópicas, obteniendo resultados competitivos [6]. Es capaz de quitar el pelo sin comprometer los detalles finos y la textura que presenta la lesión.

Esta comunicación pretende dar una visión general de la investigación desarrollada en los últimos años en torno a las transformaciones *Black Top-Hat* y *Hit-or-Miss* borrosas. Se recopilan las definiciones y propiedades satisfechas por estas transformaciones y se exponen distintas aplicaciones que demuestran el potencial de esta línea de investigación. La estructura de la comunicación es la siguiente. Una vez presentados los conceptos básicos sobre conjunciones y funciones de implicación borrosas en la sección 2, se presentan las transformaciones *Black Top-Hat* y *Hit-or-Miss* borrosas, junto con sus propiedades y aplicaciones, en las secciones 3 y 4, respectivamente. La comunicación acaba con las conclusiones del trabajo.

2. Preliminares

A continuación presentamos las definiciones básicas que se irán utilizando a lo largo del artículo. Se supondrá, además, que el lector conoce la teoría básica sobre las conjunciones borrosas y las funciones de implicación borrosas. Más detalles sobre estos conectivos lógicos se puede encontrar en [3] y [1], respectivamente.

Definición 1 *Un operador binario creciente $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ se llama conjunción borrosa si satisface $C(0, 1) = C(1, 0) = 0$ y $C(1, 1) = 1$.*

Un tipo de conjunciones borrosas estudiadas en profundidad es la clase de las t-normas, véase [11] para más detalles.

Definición 2 *Una conjunción borrosa T se llama t-norma cuando es conmutativa, asociativa y satisface $T(1, x) = x$ para todo $x \in [0, 1]$.*

Ejemplos bien conocidos de t-normas son las recogidas en el cuadro 1.

Definición 3 Una función decreciente $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ se llama negación borrosa fuerte si es una involución, es decir, si $N(N(x)) = x$ para todo $x \in [0, 1]$.

Definición 4 Un operador binario $I : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ es una función de implicación borrosa si es decreciente en la primera variable, creciente en la segunda y satisface $I(0, 0) = I(1, 1) = 1$ e $I(1, 0) = 0$.

Una forma de obtener funciones de implicación borrosa es el método de residuación. Dada una conjunción borrosa C tal que $C(1, x) > 0$ para todo $x > 0$, el operador binario $I_C(x, y) = \sup\{z \in [0, 1] \mid C(x, z) \leq y\}$ es una implicación borrosa llamada la *implicación residual* o *R-implicación* de C (véase [14]). En el cuadro 1 se recogen las t-normas más importantes con sus correspondientes R-implicaciones.

t-norma	Expresión	R-implicación
Lukasiewicz	$T_L(x, y) = \max\{x + y - 1, 0\}$	$I_L(x, y) = \min\{1, 1 - x + y\}$
Mínimo	$T_M(x, y) = \min\{x, y\}$	$I_{GD}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \leq y \\ y, & \text{si } x > y \end{cases}$
Producto	$T_P(x, y) = x \cdot y$	$I_{GG}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y \\ \frac{y}{x}, & \text{si } x > y \end{cases}$

Cuadro 1. Algunas t-normas y sus correspondientes R-implicaciones.

Hay dos propiedades importantes para funciones de implicación borrosa que se usarán en el artículo.

Definición 5 Dada una función de implicación borrosa I , diremos que satisface el principio de neutralidad por la izquierda (NP) si $I(1, x) = x$ para todo $x \in [0, 1]$, y que satisface la propiedad de orden (OP) si, para todo $(x, y) \in [0, 1]^2$, $I(x, y) = 1$ si, y solo si, $x \leq y$.

Todas las R-implicaciones generadas por t-normas satisfacen (NP), así como todas las R-implicaciones generadas por t-normas continuas por la izquierda satisfacen (OP).

3. Transformación Hit-or-Miss

Empezamos esta sección con algunos preliminares sobre los operadores morfológicos borrosos en niveles de gris para a continuación pasar a la definición formal de la transformación Hit-or-Miss junto con sus propiedades.

3.1. Operadores de la morfología matemática borrosa

Los operadores morfológicos **erosión borrosa** y **dilatación borrosa** se definen como sigue:

Definición 6 ([13]) Dadas una conjunción C y una función de implicación borrosa I , la dilatación borrosa $D_C(A, B)$ y la erosión borrosa $E_I(A, B)$ de una imagen en niveles de gris A mediante un elemento estructurante B se definen como:

$$D_C(A, B)(y) = \sup_{x \in d_A \cap T_y(d_B)} C(B(x-y), A(x)),$$

$$E_I(A, B)(y) = \sup_{x \in d_A \cap T_y(d_B)} I(B(x-y), A(x)),$$

donde d_A y d_B representan los dominios de definición de las imágenes A y B y $T_y(d_B)$ es la traslación del conjunto borroso d_B por el vector $y \in \mathbb{R}^2$ dada por $T_y(d_B)(z) = d_B(z-y)$.

Las propiedades algebraicas de estos operadores están estudiadas en [13].

3.2. Definición

La versión clásica del operador Hit-or-Miss $A \otimes B$ de una imagen binaria A por un elemento estructurante $B = (B_{FG}, B_{BG})$ donde B_{FG} y B_{BG} son los elementos estructurantes “foreground” y “background” respectivamente, extrae todos los píxeles de la imagen binaria rodeados por áreas en las que B_{FG} y B_{BG} coinciden con patrones predefinidos. Se define como:

$$A \otimes B = \{x : (B_{FG})_x \subseteq A, (B_{BG})_x \subseteq A^c\} = (A \ominus B_{FG}) \cap (A^c \ominus B_{BG}),$$

donde $(\cdot)_x$ es la traslación por x , \ominus es la erosión binaria $A \ominus B = \{x : B_x \subseteq A\}$ y $A^c(x) = 1 - x$.

A continuación, vamos a generalizar el operador anterior para una imagen en niveles de gris dentro del paradigma de la morfología matemática borrosa.

Definición 7 ([8]) Sean C , I y N una conjunción, una función de implicación borrosa y una negación borrosa, respectivamente. La transformación morfológica borrosa Hit-or-Miss (FMHMT) de una imagen en niveles de gris A con respecto al elemento estructurante en niveles de gris $B = (B_1, B_2)$ se define para todo $y \in d_A$ de la forma siguiente:

$$FMHMT_{C,I,N}(A, B)(y) = C(E_I(A, B_1)(y), E_I(N(A), B_2)(y)), \quad (1)$$

donde $N(A)(x) = N(A(x))$ para todo $x \in d_A$ y $C(A, B)(x) = C(A(x), B(x))$, para cada $x \in d_A \cap d_B$.

3.3. Propiedades

En esta sección, vamos a introducir todo un conjunto de propiedades que verifica el operador Hit-or-Miss introducido en la subsección anterior. Las demostraciones de dichas propiedades pueden verse en [8].

El primer resultado demuestra que el operador FMHMT es una generalización del Hit-or-Miss binario.

Teorema 8 ([8]) Sea A una imagen binaria y $B = (B_1, B_2)$ un elemento estructurante binario. Entonces el operador FMHMT coincide la transformación binaria clásica Hit-or-Miss, es decir, $FMHMT_{C,I,N}(A, B) = A \otimes B$.

El operador FMHMT satisface la invariancia por traslaciones y es monótono en el sentido del siguiente resultado.

Proposición 9 ([8]) Sea T una t -norma, I una función de implicación borrosa que satisface (OP), N una negación fuerte, A una imagen en niveles de gris, $B_1^* = (B_1, N(B_1))$ y $B_2^* = (B_2, N(B_2))$ dos elementos estructurantes en niveles de gris. Entonces se cumple que:

- i) $FMHMT_{T,I,N}(A, B_2^*)(y) \leq FMHMT_{T,I,N}(A, B_1^*)(y)$ para todo $x \in d_{T_y(B_1)} \cap d_{T_y(B_2)}$ e $y \in \mathbb{R}^n$ si $A(x) \leq B_1(x-y) \leq B_2(x-y)$.
- ii) $FMHMT_{T,I,N}(A, B_2^*)(y) \leq FMHMT_{T,I,N}(A, B_1^*)(y)$ para todo $x \in d_{T_y(B_1)} \cap d_{T_y(B_2)}$ e $y \in \mathbb{R}^n$ si $B_2(x-y) \leq B_1(x-y) \leq A(x)$.

Una de las propiedades más importantes de este operador se basa en la capacidad de detectar con valor 1 todas las partes de la imagen que incluyen el elemento estructurante. Para ello, se necesita el concepto de “parte de una imagen”, introducido en [8].

Proposición 10 ([8]) Sea A una imagen en niveles de gris, $B = (B_1, N(B_1))$ un elemento estructurante en niveles de gris, T una t -norma, I una función de implicación borrosa que satisface (OP) e $y \in \mathbb{R}^n$. Entonces B_1 es una parte de A en el punto y si, y sólo si, $FMHMT_{T,I,N}(A, B)(y) = 1$.

Sin embargo, el FMHMT no sólo detecta las partes de la imagen que son idénticas al elemento estructurante como hace el Hit-or-Miss binario, sino que proporciona un valor basado en la agregación del grado de similaridad entre el elemento estructurante B_1 y la imagen A con el grado de similaridad entre el elemento estructurante B_2 y la imagen complementaria $N(A)$.

3.4. Aplicación – Detector Curvilíneo

En esta sección presentamos un detector de objetos curvilíneos usando la transformación morfológica borrosa Hit-or-Miss e inspirado en el trabajo de Bai et al. [2]. Como se ha explicado en la sección 3.3, la FMHMT busca la aparición de una forma predefinida (B_1) y la ausencia de otra forma predefinida (B_2) en la imagen. Nuestras formas B_1 tienen forma de segmento recto, con una cierta anchura y orientación, y con un perfil en niveles de gris con un cierto decaimiento gaussiano. Las formas B_2 son sus complementarias, es decir $B_2(x) = N(B_1(x))$. El detector tiene como salida una imagen en niveles de gris que indica, para cada pixel, su grado de pertenencia a un objeto curvilíneo. Una descripción más detallada se puede encontrar en [4].

El detector emplea una batería de elementos estructurantes normalizados a $[0, 1]$, todos con la misma forma, y difiriendo en su tamaño y su orientación. Se consideran segmentos de recta que pasan por el $(0, 0)$ con una orientación α (ángulo respecto de la horizontal) y que tienen un decaimiento gaussiano en base a la distancia de cualquier punto del plano a tal segmento. Se denotan por $B_1^{(s, \alpha)}$ donde s es el tamaño en píxeles. Para más detalles, ver [4].

Nuestro detector curvilíneo se basa en la agregación de los resultados obtenidos por la transformación $FMHMT$ para diversas parejas (s, α) . Formalmente lo podemos describir como sigue. Sean Agg_1 y Agg_2 dos funciones de agregación de $[0, 1]^r \rightarrow [0, 1]$, con r arbitrario. Sean C, I, N , una conjunción borrosa, una función de implicación borrosa y una negación fuerte, respectivamente. Sea A una imagen en niveles de gris, el *detector de objetos curvilíneos basado en la transformada borrosa Hit-or-Miss* aplicado a la imagen A se define como:

$$D_1(A) = \underset{s \in \{s_1, \dots, s_n\}}{Agg_2} \left\{ \underset{\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}}{Agg_1} \left\{ FMHMT_{C,I,N}(A, B_1^{(s,\alpha)}, B_2^{(s,\alpha)}) \right\} \right\}.$$

Los tamaños s_1, \dots, s_n determinan la anchura de los objetos curvilíneos que son de nuestro interés, y la agregación de las diferentes escalas y orientaciones asegura que capturamos objetos curvilíneos cuya anchura está dentro de un cierto rango.

En los experimentos que mostramos a continuación se han utilizado m orientaciones (i.e. $\alpha_k = \frac{180^\circ}{m}k$ for $k = 1, \dots, m$), con elementos estructurantes de tamaños 5×5 , 9×9 and 13×13 , la t-norma de Łukasiewicz T_{LK} como conjunción C , la implicación de Łukasiewicz como I , la negación estándar $N(x) = 1 - x$ como N y la suma probabilística $S_P(x, y) = \min\{x + y, 1\}$ como función de agregación Agg_1 y Agg_2 .

En la figura 1 mostramos los resultados que se obtienen cuando consideramos seis orientaciones, y vamos cambiando los tamaños que consideramos en los elementos estructurantes. El resto de parámetros son los que hemos prefijado previamente. La figura 2 muestra el efecto obtenido cuando variamos la cantidad de orientaciones usadas en los elementos estructurantes, y dejamos prefijados el resto de parámetros.

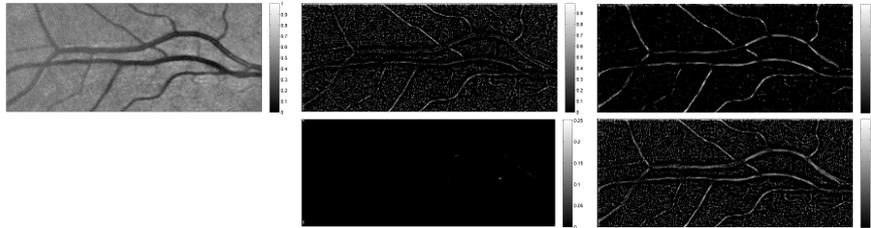


Figura 1. Resultados al detectar los vasos en una imagen de tamaño 104×262 (arriba a la izquierda) cuando se utilizan 6 orientaciones, y diferentes tamaños para los elementos estructurantes: con los tamaños $\{3, 5\}$ (centro superior), $\{5, 9\}$ (arriba a la derecha) $\{9, 13\}$ (centro inferior) y $\{3, 5, 9, 13\}$ (abajo a la derecha).



Figura 2. Diferentes resultados del detector para la imagen de una huella digital de tamaño 374×388 (izquierda) con elementos estructurantes de tamaños $s \in \{5, 9, 13\}$ y diferente número de orientaciones: de izquierda a derecha $\{2, 4, 6, 8\}$ orientaciones.

4. Transformación Black Top-Hat

En esta sección, introducimos la transformación *Black Top-Hat* con operadores de la morfología matemática borrosa. Además, la transformación *Black Top-Hat* se generaliza a imágenes multiespectrales, lo cual es posible dada su naturaleza. Finalmente, se presentan dos ejemplos de detectores de objetos curvilíneos: segmentación de vasos sanguíneos a partir de imágenes retinales (transformación monocanal) y eliminación de vello corporal en imágenes dermoscópicas (transformación multicanal).

4.1. Definición

La transformación *Black Top-Hat* la definimos formalmente a partir de los operadores de la morfología matemática borrosa.

Definición 11 Sea C una conjunción borrosa, I una función de implicación borrosa, y A, B imágenes en escala de grises. Entonces la transformación *Black Top-Hat*, $BTH_{C,I}(A,B)$, viene dada por:

$$BTH_{C,I}(A,B) = \mathcal{C}_{C,I}(A,B) - A,$$

donde $\mathcal{C}_{C,I}(A,B) = \mathcal{E}_I(\mathcal{D}_C(A,B), \bar{B})$ es el cierre borroso y $\bar{B}(x) = B(-x)$.

La transformación *Black Top-Hat* es un operador diferencial. Captura la disparidad entre la imagen original y la erosión de la dilatación. Extrae, por tanto, aquellas regiones en que la erosión no es capaz de recuperar los valores originales a partir de la dilatación. Estas regiones son aquellas zonas oscuras menores que el elemento estructurante.

4.2. Aplicación – Detector de objetos curvilíneos

Utilizando elementos estructurantes con forma circular es posible detectar objetos curvilíneos oscuros con la transformación *Black Top-Hat*. Si el diámetro del elemento estructurante es mayor que la anchura de un objeto oscuro, la dilatación lo cubrirá por completo, y por tanto la erosión no será capaz de recuperarlo. Esta transformación, por tanto, extraerá objetos finos como estructuras curvilíneas y objetos pequeños.

Vamos ahora a definir formalmente el detector curvilíneo basado en la transformación *Black Top-Hat* borrosa. Sean C e I una conjunción borrosa y una función de implicación borrosa, respectivamente. Sea A una imagen en niveles de gris. El *detector de objetos curvilíneos basado en la transformación Black Top-Hat* se define como:

$$D_2(A) = \text{máx}\{BTH_{C,I}(A, B^{(s_2)}) - BTH_{C,I}(A, B^{(s_1)}), 0\}, \quad (2)$$

donde $B^{(s)}$ denota un elemento estructurante normalizado de tamaño $s \times s$ con un decaimiento gaussiano y $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ indican las longitudes en píxeles del lado de los elementos estructurantes. Una descripción más detallada se puede encontrar en [4].

A continuación podemos ver dos ejemplos de aplicación del detector basado en la transformación *Black Top-Hat*. Los parámetros se especifican en los respectivos pies de figura. La figura 3 muestra el efecto cuando usamos diferentes parejas de t-norma y su implicación residual a la hora de calcular la transformación. Por otro lado, la figura 4 muestra el efecto que se produce cuando utilizamos diferentes tamaños para los elementos estructurantes sobre una pareja t-norma y su implicación residuada prefijada.

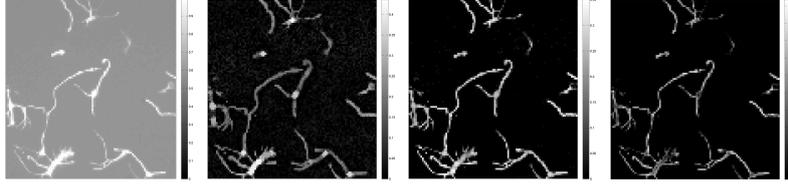


Figura 3. Imagen original de tamaño 50×50 que muestra los axones (a la izquierda), y los objetos curvilíneos encontrados con el detector $D_2(A)$: usando la t-norma mínimo (centro-izquierda), la t-norma producto y la t-norma de Łukasiewicz (derecha). Los elementos estructurantes tienen tamaños $s_1 = 3, s_2 = 13$.

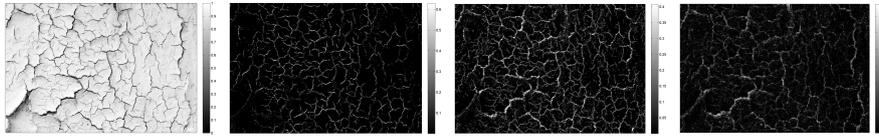


Figura 4. A la izquierda podemos ver una imagen original de tamaño 350×550 de las grietas que aparecen en un pavimento, el resto muestra los objetos curvilíneos encontrados con el detector $D_2(A)$: usando $(s_1, s_2) = (1, 5)$ (centro izquierda), $(s_1, s_2) = (5, 9)$ (centro derecha) y $(s_1, s_2) = (9, 13)$ (derecha). El resto de parámetros permanecen sin cambios: $C = T_P$ y $I = I_{GG}$.

4.2.1. Aplicación – Segmentación de vasos sanguíneos

Los vasos sanguíneos en imágenes retinales representan un ejemplo de estructura curvilínea. La vasculatura incluye venas y arterias que se ramifican y distribuyen desde el disco óptico (terminación del nervio óptico) y alrededor de la mácula (región de acumulación de conos, responsable de la visión fina). Las imágenes retinales se capturan en color, a pesar de que el canal verde es el único con un contraste adecuado. En el canal verde, los vasos sanguíneos aparecen como estructuras curvilíneas más oscuras que el fondo que les rodea, cuya anchura está en un rango bien definido y que forman una única estructura conexas. La transformación *Black Top-Hat* es, por tanto, ideal para extraerlos.

En la figura 5 observamos el comportamiento de esta transformación en una imagen retinal. En ella observamos el canal verde; un realce mediante el algoritmo CLAHE [15]; la transformación *Black Top-Hat* sobre dicho realce; y la eliminación del borde seguido de un proceso de histéresis para obtener una segmentación binaria.

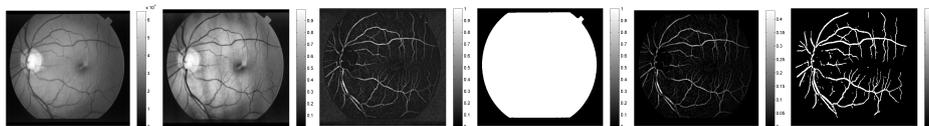


Figura 5. Procesamiento de la imagen 235 del dataset STARE [9].

4.3. Definición en imágenes multispectrales

La transformación *Black Top-Hat* se puede generalizar a más de un canal, tales como imágenes en color o imágenes hiper-espectrales. Esto es debido a que los operadores de la morfología matemática borrosa, que actúan sobre imágenes en escala de grises, han sido generalizados a imágenes multispectrales [7]. Dicha generalización supera la



Figura 6. Eliminación de vello en la imagen IMD092 del dataset PH² [12].

dificultad de decidir una ordenación entre los píxeles, ya que el orden total presente en imágenes en escala de gris (e.g. entre un píxel blanco y uno gris oscuro) ya no existe en imágenes con más de un canal (e.g. entre un píxel rojo y uno verde). Las definiciones de los operadores adaptados a imágenes multispectrales ordenan los colores en base al primer canal, y trasladan los demás canales en función del resultado de la dilatación y la erosión. Esta definición cumple con las expectativas en imágenes naturales representadas en el espacio de color $L^*a^*b^*$ [10], en el que el primer canal representa la luminancia y los otros la información cromática, ya que no genera píxeles cuya información cromática no apareciera previamente en la imagen original.

Sean \mathcal{D}^{\equiv} y \mathcal{E}^{\equiv} la dilatación y erosión para imágenes multispectrales [7]. Entonces, la transformación *Black Top-Hat* en imágenes multispectrales se define como:

Definición 12 Sea C una conjunción borrosa, I una función de implicación borrosa, y A una imagen multispectral y B una imagen en escala de grises. Sea $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ una distancia entre el conjunto de colores $c \in \mathbb{C}$. Entonces, se define la transformación *Black Top-Hat* negra, $BTH_{C,I}^{\equiv}(A, B)$, para cada $y \in \mathbb{R}^n$ como

$$BTH_{C,I}^{\equiv}(A, B)(y) = d(A(y), \mathcal{E}_{C,I}^{\equiv}(A, B)(y)),$$

donde $\mathcal{E}_{C,I}^{\equiv}(A, B) = \mathcal{E}_I^{\equiv}(\mathcal{D}_C^{\equiv}(A, B), \bar{B})$ es el cierre borroso en imágenes multispectrales y $\bar{B}(x) = B(-x)$.

4.4. Aplicación – Detector de vello

El vello corporal en imágenes dermoscópicas aparece como una serie de objetos curvilíneos. En ellas, las lesiones dérmicas tales como melanomas pueden quedar parcialmente ocultas, lo cual dificulta su procesamiento automático. Detectar el vello, muchas veces seguido por un proceso de *inpainting*, ayuda a la segmentación de la lesión y al estudio de la textura y de los colores que presenta. Si representamos las imágenes mediante el espacio de color $L^*a^*b^*$, por ser éste perceptualmente uniforme, la distancia Euclídea entre colores es proporcional a la diferencia perceptual observada por el ojo humano [10].

Como se observa en la figura 6, la transformación *Black Top-Hat* para imágenes multispectrales es la operación central de un algoritmo de eliminación de vello. En la figura observamos, de izquierda a derecha, la imagen original; un realce de contraste mediante el algoritmo CLAHE [15] en el primer canal del espacio $L^*a^*b^*$; la transformación *Black Top-Hat* con un elemento estructurante B de tamaño 9×9 ; y la máscara binaria que obtenemos de posprocesarla con un filtro de mediana y un umbral fijado experimentalmente.

5. Conclusiones

En este artículo se han presentado las transformaciones morfológicas *Black Top-Hat* y *Hit-or-Miss* borrosas, definidas en el marco de la morfología matemática borrosa. Por una parte, se han presentado las definiciones de dichas transformaciones, así como sus propiedades básicas. Además, se han presentado resultados obtenidos en aplicaciones prácticas: la transformación *Hit-or-Miss* ha sido aplicada satisfactoriamente en la detección de objetos curvilíneos, mientras que la transformación *Black Top-Hat* se ha aplicado especialmente a la segmentación de vasos sanguíneos, obteniendo resultados muy competitivos. A su vez, mediante la *Soft Color Morphology*, se ha podido aplicar esta transformación a imágenes en color, para la eliminación de vello en imágenes dermoscópicas.

Agradecimientos: El proyecto TIN 2016-75404-P AEI/FEDER, UE financia el trabajo. P. Bibiloni recibe financiación también de la beca FPI/1645/2014 de la *Conselleria d'Educació, Cultura i Universitats del Govern de les Illes Balears* en el marco de un programa operativo cofinanciado por el Fondo Social Europeo.

Referencias

- [1] M. Baczyński and B. Jayaram. *Fuzzy Implications*, volume 231 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer, Berlin Heidelberg, 2008.
- [2] X. Bai, T. Wang, and F. Zhou. Linear feature detection based on the multi-scale, multi-structuring element, grey-level hit-or-miss transform. *Computers & Electrical Engineering*, 46:487–499, 2015.
- [3] G. Beliakov, A. Pradera, and T. Calvo, editors. *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*. Springer, Berlin Heidelberg, 2007.
- [4] P. Bibiloni, M. González-Hidalgo, and S. Massanet. General-purpose curvilinear object detection with fuzzy mathematical morphology. *Aceptado con minor revision en Applied Soft Computing*, 2017.
- [5] P. Bibiloni, M. González-Hidalgo, and S. Massanet. A real-time fuzzy morphological algorithm for retinal vessel segmentation. *Sometido a Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 2017.
- [6] P. Bibiloni, M. González-Hidalgo, and S. Massanet. Skin hair removal in dermoscopic images using soft color morphology. In A. ten Teije (et al.), editor, *Artificial Intelligence in Medicine: 16th Conference on Artificial Intelligence in Medicine, AIME 2017, Proceedings*, pages 322–326. Springer International Publishing, 2017.
- [7] P. Bibiloni, M. González-Hidalgo, and S. Massanet. Soft color morphology. *Accepted in IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2017)*, 2017.
- [8] M. González-Hidalgo, S. Massanet, A. Mir, and D. Ruiz-Aguilera. A fuzzy morphological hit-or-miss transform for grey-level images: A new approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 286:30 – 65, 2016.
- [9] A. Hoover, V. Kouznetsova, and M. Goldbaum. Locating blood vessels in retinal images by piecewise threshold probing of a matched filter response. *IEEE Trans on Medical Imaging*, 19(3):203–210, 2000.
- [10] D. B. Judd and G. Wyszecki. *Color in business, science and industry*. John Wiley and Sons. Ltd., 1963.
- [11] E.P. Klement, R. Mesiar, and E. Pap. *Triangular norms*. Kluwer Academic Publishers, London, 2000.
- [12] T. Mendonça, P. M. Ferreira, J. S. Marques, A.R.S. Marcal, and J. Rozeira. PH 2 - a dermoscopic image database for research and benchmarking. In *35th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC)*, pages 5437–5440. IEEE, 2013.
- [13] M. Nachttegael and E.E. Kerre. *Fuzzy techniques in image processing*, volume 52 of *Studies in fuzziness and soft computing*, chapter Classical and fuzzy approaches towards mathematical morphology, pages 3–57. Springer-Verlag, Heidelberg, 2000.
- [14] Y. Ouyang. On fuzzy implications determined by aggregation operators. *Inform. Sci.*, 193:153–162, 2012.
- [15] K. Zuiderveld. Contrast limited adaptive histogram equalization. In *Graphics GEMS IV*, pages 474–485. Academic Press Professional, Inc., 1994.