Estudio del Modus Tollens para implicaciones borrosas

I. Aguiló, J. Suñer, J. Torrens

Soft Computing, Processament d'Imatges i Agregació
Departament Ciències Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears

ESTYLF-CAEPIA 2018. Granada

Indice

Indice

Indice

Indice

Indice

Introducción

Motivación

Los procesos de inferencia borrosa en el razonamiento aproximado se llevan a cabo habitualmente a través de las reglas

- Modus Ponens

$$T(x, I(x, y)) \leq y \quad \text{para todos} \quad x, y \in [0, 1]$$

Motivación

Los procesos de inferencia borrosa en el razonamiento aproximado se llevan a cabo habitualmente a través de las reglas

- Modus Ponens

$$T(x, I(x, y)) \leq y \quad \text{para todos} \quad x, y \in [0, 1]$$

- Modus Tollens

$$T(N(y), I(x, y)) \leq N(x) \quad \text{para todos} \quad x, y \in [0, 1]$$

Introducción

- En este trabajo presentamos la generalización del Modus Tollens, dando lugar a la propiedad que llamaremos *U*-Modus Tollens

$$U(N(y), I(x, y)) \leq N(x) \quad \text{para todos} \quad x, y \in [0, 1],$$

donde U es una uninorma, I una función de implicación y N una negación.

Introducción

- En este trabajo presentamos la generalización del Modus Tollens, dando lugar a la propiedad que llamaremos *U*-Modus Tollens

$$U(N(y), I(x, y)) \leq N(x) \quad \text{para todos} \quad x, y \in [0, 1],$$

  donde U es una uninorma, I una función de implicación y N una negación.
- Estudiaremos el *U*-Modus Tollens para RU-implicaciones derivadas de tres tipos de uninormas: las de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$, las representables y las idempotentes.

Preliminares

Implicaciones borrosas

$I : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ es una implicación si

Implicaciones borrosas

$I : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ es una implicación si

Implicaciones borrosas

$I : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ es una implicación si

I1) I es decreciente respecto de la primera variable y creciente respecto de la segunda. Es decir, para todo $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in [0, 1]$,

$$si\ x_1 \leq x_2,\ entonces\ I(x_1, y) \geq I(x_2, y)$$

$$si\ y_1 \leq y_2,\ entonces\ I(x, y_1) \leq I(x, y_2)$$

Implicaciones borrosas

$I : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ es una implicación si

I1) I es decreciente respecto de la primera variable y creciente respecto de la segunda. Es decir, para todo $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in [0,1]$,

$$si\ x_1 \leq x_2,\ entonces\ I(x_1, y) \geq I(x_2, y)$$

$$si\ y_1 \leq y_2,\ entonces\ I(x, y_1) \leq I(x, y_2)$$

I2) $I(0,0) = I(1,1) = 1$ y $I(1,0) = 0$.

Universitat de les Illes Balears

Negación Borrosa

$N : [0,1] \to [0,1]$ es una negación borrosa si es decreciente con $N(0) = 1$ y $N(1) = 0$.

Negación Borrosa

$N : [0,1] \to [0,1]$ es una negación borrosa si es decreciente con $N(0) = 1$ y $N(1) = 0$.

Negación Borrosa

$N : [0, 1] \to [0, 1]$ es una negación borrosa si es decreciente con $N(0) = 1$ y $N(1) = 0$.

Diremos que una negación borrosa N es *fuerte* cuando es una involución, es decir, $N(N(x)) = x$ para todo $x \in [0, 1]$.

Negación Natural

Sea I una implicación borrosa. La negación borrosa N_I definida por $N_I(x) = I(x, 0)$ para todo $x \in [0, 1]$ se llama la negación natural inducida por I.

Propiedades de las Implicaciones

- Principio de neutralidad por la izquierda, (NP):

$$I(1, y) = y \qquad \text{para todo} \quad y \in [0, 1].$$

Propiedades de las Implicaciones

- Principio de neutralidad por la izquierda, (NP):

$$I(1, y) = y \qquad \text{para todo} \quad y \in [0, 1].$$

- Principio de Identidad, (IP):

$$I(x, x) = 1 \text{ para todo } x \in [0, 1].$$

Uninormas

Una *uninorma* es una aplicación $U : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ asociativa, conmutativa, creciente en cada variable y tal que existe un elemento $e \in [0,1]$, llamado *elemento neutro*, tal que $U(e,x) = x$ para todo $x \in [0,1]$.

Uninormas

Una *uninorma* es una aplicación $U : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ asociativa, conmutativa, creciente en cada variable y tal que existe un elemento $e \in [0,1]$, llamado *elemento neutro*, tal que $U(e,x) = x$ para todo $x \in [0,1]$.

Uninormas

Una *uninorma* es una aplicación $U : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ asociativa, conmutativa, creciente en cada variable y tal que existe un elemento $e \in [0,1]$, llamado *elemento neutro*, tal que $U(e,x) = x$ para todo $x \in [0,1]$.

- Para un valor $e \in]0,1[$ la operación se comporta como una t-norma en $[0,e]^2$, como una t-conorma en $[e,1]^2$ y toma valores entre el mínimo y el máximo en el conjunto

$$A(e) = [0,e[\times]e,1] \cup]e,1] \times [0,e[.$$

Uninormas

Una *uninorma* es una aplicación $U : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ asociativa, conmutativa, creciente en cada variable y tal que existe un elemento $e \in [0,1]$, llamado *elemento neutro*, tal que $U(e,x) = x$ para todo $x \in [0,1]$.

- Para un valor $e \in]0,1[$ la operación se comporta como una t-norma en $[0,e]^2$, como una t-conorma en $[e,1]^2$ y toma valores entre el mínimo y el máximo en el conjunto

$$A(e) = [0,e[\times]e,1] \cup]e,1] \times [0,e[.$$

- Denotaremos de forma habitual una uninorma con elemento neutro e y t-norma y t-conorma subyacentes T y S, respectivamente, por $U \equiv \langle T, e, S\rangle$.

Uninormas y operación residuada

- Cuando $U(1,0) = 0$, se dice que la uninorma U es *conjuntiva*.

Universitat de les Illes Balears

Uninormas y operación residuada

- Cuando $U(1, 0) = 0$, se dice que la uninorma U es *conjuntiva*.

Uninormas y operación residuada

- Cuando $U(1,0) = 0$, se dice que la uninorma U es *conjuntiva*.
- Cuando $U(1,0) = 1$, se dice que la uninorma U es *disyuntiva*.

Uninormas y operación residuada

- Cuando $U(1,0) = 0$, se dice que la uninorma U es *conjuntiva*.
- Cuando $U(1,0) = 1$, se dice que la uninorma U es *disyuntiva*.

Definición Sea U una uninorma. La *operación residuada* obtenida a partir de U es la operació binaria dada por

$$I_U(x,y) = \sup\{z \in [0,1] \mid U(x,z) \leq y\}$$

para todos $x, y \in [0,1]$.

RU-implicación

Proposición

RU-implicación

Proposición

- Sea U una uninorma y I_U su operación residuada. Entonces I_U es una implicación si y solo si $U(x, 0) = 0$ para todo $x < 1$. En tal caso, I_U recibe el nombre de *RU-implicación*.

RU-implicación

Proposición

- Sea U una uninorma y I_U su operación residuada. Entonces I_U es una implicación si y solo si $U(x, 0) = 0$ para todo $x < 1$. En tal caso, I_U recibe el nombre de *RU-implicación*.
- En el caso de trabajar con uninormas continuas por la izquierda, claramente se obtiene que I_U es una implicación si y solo si U es conjuntiva.

U_{min}

Sea $U : [0,1]^2 \to [0,1]$ una uninorma con elemento neutro $e \in]0,1[$. Si $U(0,1) = 0$, entonces la sección $x \mapsto U(x,1)$ es continua excepto para $x = e$ si y solo si U es de la forma, donde T es una t-norma y S es una t-conorma

$$U(x,y) = \begin{cases} eT\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right) & \text{si } (x,y) \in [0,e]^2, \\ e + (1-e)S\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right) & \text{si } (x,y) \in [e,1]^2, \\ \text{mín}(x,y) & \text{si } (x,y) \in A(e), \end{cases}$$

Denotaremos esta clase de uninormas por $\mathcal{U}_{\text{mín}}$, y por $U \equiv \langle T, e, S\rangle_{\text{mín}}$ a una uninorma de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ con elemento neutro e y t-norma y t-conorma subyacentes T y S, respectivamente.

Modus Tollens respecto de una uninorma

U-Modus Tollens

Definición Diremos que una función de implicación borrosa I y una negación N satisfacen el *Modus Tollens respecto de una uninorma U*, o simplemente el *U-Modus Tollens*, si

$$U(N(y), I(x,y)) \leq N(x) \quad \text{para todos} \quad x, y \in [0,1].$$

U-Modus Tollens

Definición Diremos que una función de implicación borrosa I y una negación N satisfacen el *Modus Tollens respecto de una uninorma U*, o simplemente el *U-Modus Tollens*, si

$$U(N(y), I(x, y)) \leq N(x) \quad \text{para todos} \quad x, y \in [0, 1].$$

Proposición
Sean I una función de implicación borrosa y N una negación que satisfacen el Modus Tollens respecto de una uninorma U. Entonces la uninorma U ha de ser necesariamente conjuntiva.

Ejemplo 1: *U*-Modus Tollens y Negación más pequeña

Sea U una uninorma conjuntiva, consideremos la negación más pequeña $N = N_{D_1}$ dada por

$$N_{D_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Entonces una implicación I y la negación N_{D_1} satisfacen el Modus Tollens respecto de U si y sólo si N_I es la propia negación N_{D_1}.

Ejemplo 2: *U*-Modus Tollens y Negación más grande

Consideremos ahora la negación más grande $N = N_{D_2}$ dada por

$$N_{D_2}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

En este caso se puede ver que una implicación I y la negación N_{D_2} satisfacen el Modus Tollens respecto de una uninorma conjuntiva U si y sólo si $I(1, y) = 0$ para todo $y < 1$.

U-Modus Tollens: caracterización de las soluciones

Proposición

Sean I una función de implicación borrosa, N una negación y U una uninorma conjuntiva. Si U es continua por la izquierda, I, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U si y sólo si

$$I(x,y) \leq I_U(N(y),N(x)) \quad \text{para todos } x,y \in [0,1],$$

donde I_U indica la implicación residuada derivada de la uninorma U.

U-Modus Tollens: Propiedades

Sean I una función de implicación borrosa y N una negación que satisfacen el Modus Tollens respecto de una uninorma conjuntiva U. Sea e el elemento neutro de U, entonces:

U-Modus Tollens: Propiedades

Sean I una función de implicación borrosa y N una negación que satisfacen el Modus Tollens respecto de una uninorma conjuntiva U. Sea e el elemento neutro de U, entonces:

1. $U(N(y), I(1, y)) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.

U-Modus Tollens: Propiedades

Sean I una función de implicación borrosa y N una negación que satisfacen el Modus Tollens respecto de una uninorma conjuntiva U. Sea e el elemento neutro de U, entonces:

1. $U(N(y), I(1, y)) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.
2. $N_I(x) \leq N(x)$ para todo $x \in [0, 1]$. Además, para todo $x \in [0, 1]$ tal que $N_I(x) \geq e$ ha que ser $N(x) = 1$.

U-Modus Tollens: Propiedades

Sean I una función de implicación borrosa y N una negación que satisfacen el Modus Tollens respecto de una uninorma conjuntiva U. Sea e el elemento neutro de U, entonces:

1. $U(N(y), I(1, y)) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.
2. $N_I(x) \leq N(x)$ para todo $x \in [0, 1]$. Además, para todo $x \in [0, 1]$ tal que $N_I(x) \geq e$ ha que ser $N(x) = 1$.
3. Sea $\alpha_N = \sup\{x \in [0, 1] \mid N(x) \geq e\}$. Entonces, se satisface una y sólo una de las siguientes condiciones:

U-Modus Tollens: Propiedades

Sean I una función de implicación borrosa y N una negación que satisfacen el Modus Tollens respecto de una uninorma conjuntiva U. Sea e el elemento neutro de U, entonces:

1. $U(N(y), I(1, y)) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.
2. $N_I(x) \leq N(x)$ para todo $x \in [0, 1]$. Además, para todo $x \in [0, 1]$ tal que $N_I(x) \geq e$ ha que ser $N(x) = 1$.
3. Sea $\alpha_N = \sup\{x \in [0, 1] \mid N(x) \geq e\}$. Entonces, se satisface una y sólo una de las siguientes condiciones:
   - $N(x) < e$ para todo $x > 0$ (es decir, $\alpha_N = 0$),

U-Modus Tollens: Propiedades

Sean I una función de implicación borrosa y N una negación que satisfacen el Modus Tollens respecto de una uninorma conjuntiva U. Sea e el elemento neutro de U, entonces:

1. $U(N(y), I(1, y)) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.
2. $N_I(x) \leq N(x)$ para todo $x \in [0, 1]$. Además, para todo $x \in [0, 1]$ tal que $N_I(x) \geq e$ ha que ser $N(x) = 1$.
3. Sea $\alpha_N = \sup\{x \in [0, 1] \mid N(x) \geq e\}$. Entonces, se satisface una y sólo una de las siguientes condiciones:
   - $N(x) < e$ para todo $x > 0$ (es decir, $\alpha_N = 0$),
   - $\alpha_N > 0$ y se tiene $I(1, y) = 0$ para todo $y < \alpha_N$.

U-Modus Tollens: Propiedades

Sean I una función de implicación borrosa y N una negación que satisfacen el Modus Tollens respecto de una uninorma conjuntiva U. Sea e el elemento neutro de U, entonces:

1. $U(N(y), I(1, y)) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.
2. $N_I(x) \leq N(x)$ para todo $x \in [0, 1]$. Además, para todo $x \in [0, 1]$ tal que $N_I(x) \geq e$ ha que ser $N(x) = 1$.
3. Sea $\alpha_N = \sup\{x \in [0, 1] \mid N(x) \geq e\}$. Entonces, se satisface una y sólo una de las siguientes condiciones:
   - $N(x) < e$ para todo $x > 0$ (es decir, $\alpha_N = 0$),
   - $\alpha_N > 0$ y se tiene $I(1, y) = 0$ para todo $y < \alpha_N$.
4. Si I satisface (NP), ha de ser necesariamente $\alpha_N = 0$.

U-Modus Tollens: Propiedades

Sean I una función de implicación borrosa y N una negación que satisfacen el Modus Tollens respecto de una uninorma conjuntiva U. Sea e el elemento neutro de U, entonces:

1. $U(N(y), I(1, y)) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.
2. $N_I(x) \leq N(x)$ para todo $x \in [0, 1]$. Además, para todo $x \in [0, 1]$ tal que $N_I(x) \geq e$ ha que ser $N(x) = 1$.
3. Sea $\alpha_N = \sup\{x \in [0, 1] \mid N(x) \geq e\}$. Entonces, se satisface una y sólo una de las siguientes condiciones:
   - $N(x) < e$ para todo $x > 0$ (es decir, $\alpha_N = 0$),
   - $\alpha_N > 0$ y se tiene $I(1, y) = 0$ para todo $y < \alpha_N$.
4. Si I satisface (NP), ha de ser necesariamente $\alpha_N = 0$.
5. Si I satisface (IP) y $N(x) < 1$ para todo $x > 0$, ha de ser necesariamente $\alpha_N = 0$.

U-Modus Tollens y $\alpha_N = 0$

Proposición

Sean I una función de implicación borrosa, N una negación tal que $N(x) < e$ para todo $x > 0$ y U una uninorma de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ con elemento neutro e. Entonces I, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U si y sólo si

$$U(N(y), I(x, y)) \leq N(x) \quad \text{para todos } y < x.$$

U-Modus Tollens e Implicaciones NP

Proposición

Sean I una función de implicación borrosa que satisface (NP), N una negación y U una uninorma conjuntiva con elemento neutro e. Si I, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, entonces son ciertas las siguientes propiedades:

U-Modus Tollens e Implicaciones *NP*

Proposición

Sean I una función de implicación borrosa que satisface (NP), N una negación y U una uninorma conjuntiva con elemento neutro e. Si I, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, entonces son ciertas las siguientes propiedades:

1. $U(N(y), y) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.

U-Modus Tollens e Implicaciones NP

Proposición

Sean I una función de implicación borrosa que satisface (NP), N una negación y U una uninorma conjuntiva con elemento neutro e. Si I, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, entonces son ciertas las siguientes propiedades:

1. $U(N(y), y) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.
2. $N(x) = 0$ para todo $x \geq e$ y $N(x) < e$ para todo $x > 0$.

U-Modus Tollens e Implicaciones NP

Proposición

Sean I una función de implicación borrosa que satisface (NP), N una negación y U una uninorma conjuntiva con elemento neutro e. Si I, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, entonces son ciertas las siguientes propiedades:

1. $U(N(y), y) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.
2. $N(x) = 0$ para todo $x \geq e$ y $N(x) < e$ para todo $x > 0$.
3. $U(N(y), I(e, y)) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.

U-Modus Tollens e Implicaciones *NP*

Proposición

Sean I una función de implicación borrosa que satisface (*NP*), N una negación y U una uninorma conjuntiva con elemento neutro e. Si I, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, entonces son ciertas las siguientes propiedades:

1. $U(N(y), y) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.
2. $N(x) = 0$ para todo $x \geq e$ y $N(x) < e$ para todo $x > 0$.
3. $U(N(y), I(e, y)) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.
4. Si N es estrictamente decreciente en el intervalo $]0, e[$, ha de ser $I(x, y) < e$ para todos $y < x < e$.

U-Modus Tollens: caracterización de soluciones

Teorema 1

Sean I una función de implicación borrosa que satisface (NP), $U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle_{\text{mín}}$ y N una negación estrictamente decreciente en $]0, e[$. Entonces I, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

U-Modus Tollens: caracterización de soluciones

Teorema 1

Sean I una función de implicación borrosa que satisface (NP), $U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle_{\text{mín}}$ y N una negación estrictamente decreciente en $]0, e[$. Entonces I, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $U(N(y), I(e, y)) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.

U-Modus Tollens: caracterización de soluciones

Teorema 1

Sean I una función de implicación borrosa que satisface (NP), $U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle_{\text{mín}}$ y N una negación estrictamente decreciente en $]0, e[$. Entonces I, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $U(N(y), I(e, y)) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.
2. $N(x) = 0$ para todo $x \geq e$ y $N(x) < e$ para todo $x > 0$.

U-Modus Tollens: caracterización de soluciones

Teorema 1

Sean I una función de implicación borrosa que satisface (NP), $U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle_{\text{mín}}$ y N una negación estrictamente decreciente en $]0, e[$. Entonces I, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $U(N(y), I(e, y)) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.
2. $N(x) = 0$ para todo $x \geq e$ y $N(x) < e$ para todo $x > 0$.
3. $I(x, y) < e$ para todos $y < x < e$.

U-Modus Tollens: caracterización de soluciones

U-Modus Tollens: caracterización de soluciones

4. I' y N' satisfacen el Modus Tollens respecto de la t-norma T_U para todos $y < x$, donde I' y N' vienen dadas respectivamente por

$$I'(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ \frac{I(ex,ey)}{e} & \text{si } y < x \end{cases} \tag{1}$$

$$N'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{N(ex)}{e} & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases} \tag{2}$$

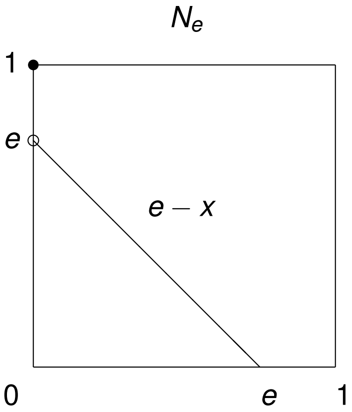
Ejemplo 3: Soluciones del U- Modus Tollens

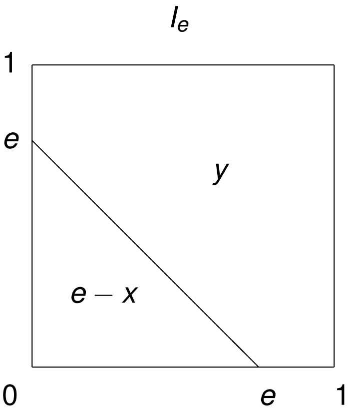
Consideremos la uninorma de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$, $U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle_{\text{mín}}$ donde $T_U = T_{\mathbf{LK}}$ es la t-norma de Łukasiewicz y S_U es una t-conorma cualquiera. Sea N_e la negación dada por

$$N_e(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ e - x & \text{si } 0 < x < e \\ 0 & \text{si } x \geq e. \end{cases}$$

Consideremos la implicación:

$$I_e(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 1 \\ \max(e - x, y) & \text{si } 0 < x \leq e \text{ y } 0 \leq y \leq e \\ y & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$


N_e
1
e
$e - x$
0
e
1


I_e
1
e
y
$e - x$
0
e
1

U-Modus Tollens para *RU*-implicaciones

RU-implicaciones derivadas de uninormas en $\mathcal{U}_{\text{mín}}$

Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0 \rangle_{\text{mín}}$, N una negación y $U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle$ una uninorma conjuntiva. Para el estudio de cuando I_{U_0}, y N satisfacen el U-Modus Tollens, vamos a distinguir tres casos:

RU-implicaciones derivadas de uninormas en $\mathcal{U}_{\text{mín}}$

Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0 \rangle_{\text{mín}}$, N una negación y $U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle$ una uninorma conjuntiva. Para el estudio de cuando I_{U_0}, y N satisfacen el U-Modus Tollens, vamos a distinguir tres casos:

1. $e_0 = e$

RU-implicaciones derivadas de uninormas en $\mathcal{U}_{\text{mín}}$

Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0 \rangle_{\text{mín}}$, N una negación y $U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle$ una uninorma conjuntiva. Para el estudio de cuando I_{U_0}, y N satisfacen el U-Modus Tollens, vamos a distinguir tres casos:

1. $e_0 = e$
2. $e_0 < e$

RU-implicaciones derivadas de uninormas en $\mathcal{U}_{\text{mín}}$

Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0 \rangle_{\text{mín}}$, N una negación y $U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle$ una uninorma conjuntiva. Para el estudio de cuando I_{U_0}, y N satisfacen el U-Modus Tollens, vamos a distinguir tres casos:

1. $e_0 = e$
2. $e_0 < e$
3. $e_0 > e$

Caracterización de soluciones para $e_0 = e$

Teorema 2

Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0 \rangle_{\text{mín}}$, N una negación y U una uninorma conjuntiva con elemento neutro $e_0 = e$. Entonces I_{U_0}, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

Caracterización de soluciones para $e_0 = e$

Teorema 2

Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0 \rangle_{\text{mín}}$, N una negación y U una uninorma conjuntiva con elemento neutro $e_0 = e$. Entonces I_{U_0}, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $N(x) = 0$ para todo $x \geq e$ y $N(x) < e$ para todo $x > 0$.

Caracterización de soluciones para $e_0 = e$

Teorema 2

Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0 \rangle_{\text{mín}}$, N una negación y U una uninorma conjuntiva con elemento neutro $e_0 = e$. Entonces I_{U_0}, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $N(x) = 0$ para todo $x \geq e$ y $N(x) < e$ para todo $x > 0$.
2. I_{T_0} y N' satisfacen el Modus Tollens respecto de la t-norma T_U para todos $y < x$, donde I_{T_0} es la implicación residuada derivada de la t-norma T_0 y

$$N'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{N(ex)}{e} & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

Caracterización de soluciones para $e < e_0$

Teorema 3

Sea $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0 \rangle_{\text{mín}}$, N una negación y U una uninorma conjuntiva con elemento neutro e con $e < e_0$. Supongamos que U_0 viene dada por $U_0(x, y) =$

$$\begin{cases} eT_0'\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right) & \text{si } x, y \in [0, e] \\ e + (e_0 - e)T_0''\left(\frac{x-e}{e_0-e}, \frac{y-e}{e_0-e}\right) & \text{si } x, y \in [e, e_0] \\ e_0 + (1 - e_0)S_0\left(\frac{x-e_0}{1-e_0}, \frac{y-e_0}{1-e_0}\right) & \text{si } x, y \in [e_0, 1] \\ \text{mín}(x, y) & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

siendo T_0', T_0'' t-normas.

Caracterización de soluciones para $e < e_0$

Entonces I_{U_0}, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

Caracterización de soluciones para $e < e_0$

Entonces I_{U_0}, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $N(x) = 0$ para todo $x \geq e$ y $N(x) < e$ para todo $x > 0$.

Caracterización de soluciones para $e < e_0$

Entonces I_{U_0}, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $N(x) = 0$ para todo $x \geq e$ y $N(x) < e$ para todo $x > 0$.
2. $I_{T_0'}$ y N' satisfacen el Modus Tollens respecto de la t-norma T_U para todos $y < x$, donde $I_{T_0'}$ es la implicación residuada derivada de la t-norma T_0' y N' viene dada por la ecuación

$$N'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{N(ex)}{e} & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

Caracterización de soluciones para $e_0 < e$

Teorema 4

Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0 \rangle_{\text{mín}}$, N una negación y U una uninorma conjuntiva con elemento neutro e con $e_0 < e$. Supongamos que U viene dada por $U(x, y) =$

$$\begin{cases} e_0 T'_U \left(\frac{x}{e_0}, \frac{y}{e_0} \right) & \text{si } x, y \in [0, e_0] \\ e_0 + (e - e_0) T''_U \left(\frac{x-e_0}{e-e_0}, \frac{y-e_0}{e-e_0} \right) & \text{si } x, y \in [e_0, e] \\ e + (1 - e) S_U \left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e} \right) & \text{si } x, y \in [e, 1] \\ \text{mín}(x, y) & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

siendo T'_U, T''_U t-normas.

Caracterización de soluciones para $e_0 < e$

Entonces I_{U_0}, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

Caracterización de soluciones para $e_0 < e$

Entonces I_{U_0}, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $N(x) = 0$ para todo $x \geq e_0$ y $N(x) < e_0$ para todo $x > 0$.

Caracterización de soluciones para $e_0 < e$

Entonces I_{U_0}, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $N(x) = 0$ para todo $x \geq e_0$ y $N(x) < e_0$ para todo $x > 0$.
2. I_{T_0} y N' satisfacen el Modus Tollens respecto de la t-norma T'_U para todos $y < x$, donde I_{T_0} es la implicación residuada derivada de la t-norma T_0 y N' viene dada por la ecuación

$$N'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{N(e_0 x)}{e_0} & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

Uninormas representables

Diremos que una uninorma U, con elemento neutro $e \in]0,1[$, es *representable* si existe una función estrictamente creciente $h : [0,1] \to [-\infty, +\infty]$ (llamada *generador aditivo* de U, que es único excepto una constante multiplicativa $k > 0$), con $h(0) = -\infty$, $h(e) = 0$ y $h(1) = +\infty$, tal que U viene dada por

$$U(x,y) = h^{-1}(h(x) + h(y))$$

para todos $(x,y) \in [0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$. Se tiene que $U(0,1) = U(1,0) = 0$ o $U(0,1) = U(1,0) = 1$.

Denotaremos por $U \equiv \langle e, h \rangle_{\mathrm{rep}}$ a una uninorma representable con elemento neutro $e \in]0,1[$ y generador aditivo h, y a la clase de todas la uninormas representables, por $\mathcal{U}_{\mathrm{rep}}$.

RU-implicaciones derivadas de uninormas representables

Teorema 5

Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma representable $U_0 \equiv \langle e_0, h_0 \rangle_{\text{rep}}$, N_{h_0} su negación asociada tal que $N_{h_0}(x) = h_0^{-1}(-h_0(x))$ para todo $x \in [0,1]$ que es siempre una negación fuerte y U una uninorma conjuntiva, continua por la izquierda con elemento neutro e. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

RU-implicaciones derivadas de uninormas representables

Teorema 5

Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma representable $U_0 \equiv \langle e_0, h_0 \rangle_{\mathrm{rep}}$, N_{h_0} su negación asociada tal que $N_{h_0}(x) = h_0^{-1}(-h_0(x)) \quad$ para todo $x \in [0, 1]$ que es siempre una negación fuerte y U una uninorma conjuntiva, continua por la izquierda con elemento neutro e. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- I_{U_0}, N_{h_0} satisfacen el Modus Tollens respecto de U.

RU-implicaciones derivadas de uninormas representables

Teorema 5

Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma representable $U_0 \equiv \langle e_0, h_0 \rangle_{\mathrm{rep}}$, N_{h_0} su negación asociada tal que $N_{h_0}(x) = h_0^{-1}(-h_0(x)) \quad$ para todo $x \in [0, 1]$ que es siempre una negación fuerte y U una uninorma conjuntiva, continua por la izquierda con elemento neutro e. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- I_{U_0}, N_{h_0} satisfacen el Modus Tollens respecto de U.
- $I_{U_0}(x, y) \leq I_U(N_{h_0}(y), N_{h_0}(x))$ para todos $x, y \in [0, 1]$.

RU-implicaciones derivadas de uninormas representables

Teorema 5

Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma representable $U_0 \equiv \langle e_0, h_0 \rangle_{\mathrm{rep}}$, N_{h_0} su negación asociada tal que $N_{h_0}(x) = h_0^{-1}(-h_0(x))$ para todo $x \in [0,1]$ que es siempre una negación fuerte y U una uninorma conjuntiva, continua por la izquierda con elemento neutro e. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- I_{U_0}, N_{h_0} satisfacen el Modus Tollens respecto de U.
- $I_{U_0}(x, y) \leq I_U(N_{h_0}(y), N_{h_0}(x))$ para todos $x, y \in [0, 1]$.
- $U(x, y) \leq U_0(x, y)$ para todos $x, y \in [0, 1]$.

Ejemplo: uninormas representables

Sea $U_0 \equiv \langle e, h_0 \rangle_{\mathrm{rep}}$ una uninorma representable con elemento neutro $e \in]0,1[$. Es conocido entonces que la t-norma subyacente T_U y la t-conorma S_U son estrictas. Consideremos las uninormas de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ dadas por

$$U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle_{\text{mín}} \qquad \text{y} \qquad U' \equiv \langle \text{mín}, e, S_U \rangle_{\text{mín}}.$$

Es obvio que $U \leq U_0$ pero $U' \not\leq U_0$ y por tanto, a partir del teorema anterior, deducimos que I_{U_0}, N_{h_0} satisfacen el U-Modus Tollens respecto de U pero no respecto de U'.

Uninormas Idempotentes

U es una uninorma idempotente con elemento neutro $e \in [0,1]$ si y solo si existe una función no creciente $g : [0,1] \to [0,1]$, simétrica respecto de la función identidad, con $g(e) = e$,

$$U(x,y) = \begin{cases} \text{mín}(x,y) & \text{si } y < g(x) \text{ o } (y = g(x) \text{ y } x < g^2(x)), \\ \text{máx}(x,y) & \text{si } y > g(x) \text{ o } (y = g(x) \text{ y } x > g^2(x)), \\ x \text{ o } y & \text{si } y = g(x) \text{ y } x = g^2(x), \end{cases}$$

y U es conmutativa en (x,y) tales que $y = g(x)$ y $x = g^2(x)$.

Denotaremos por $U \equiv \langle g, e \rangle_{\text{ide}}$ a una uninorma idempotente U con elemento neutro e y función asociada g, y a la clase de todas las uninormas idempotentes, por $\mathcal{U}_{\text{ide}}$.

RU-implicaciones derivadas de uninormas idempotentes

Teorema 6

Sea N_0 una negación fuerte con punto fijo e_0, I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma idempotente $U_0 \equiv \langle N_0, e_0 \rangle_{\mathrm{ide}}$ y U una uninorma conjuntiva, continua por la izquierda con elemento neutro e. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

RU-implicaciones derivadas de uninormas idempotentes

Teorema 6

Sea N_0 una negación fuerte con punto fijo e_0, I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma idempotente $U_0 \equiv \langle N_0, e_0 \rangle_{\mathrm{ide}}$ y U una uninorma conjuntiva, continua por la izquierda con elemento neutro e. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- I_{U_0}, N_0 satisfacen el Modus Tollens respecto de U.

RU-implicaciones derivadas de uninormas idempotentes

Teorema 6

Sea N_0 una negación fuerte con punto fijo e_0, I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma idempotente $U_0 \equiv \langle N_0, e_0 \rangle_{\mathrm{ide}}$ y U una uninorma conjuntiva, continua por la izquierda con elemento neutro e. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- I_{U_0}, N_0 satisfacen el Modus Tollens respecto de U.
- $I_{U_0}(x, y) \leq I_U(N_0(y), N_0(x))$ para todos $x, y \in [0, 1]$.

RU-implicaciones derivadas de uninormas idempotentes

Teorema 6

Sea N_0 una negación fuerte con punto fijo e_0, I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma idempotente $U_0 \equiv \langle N_0, e_0 \rangle_{\mathrm{ide}}$ y U una uninorma conjuntiva, continua por la izquierda con elemento neutro e. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- I_{U_0}, N_0 satisfacen el Modus Tollens respecto de U.
- $I_{U_0}(x, y) \leq I_U(N_0(y), N_0(x))$ para todos $x, y \in [0, 1]$.
- $U(x, y) \leq U_0(x, y)$ para todos $x, y \in [0, 1]$.

Conclusiones y trabajo futuro

Conclusiones

1. Se ha realizado un estudio del Modus Tollens respecto de uninormas conjuntivas.

Conclusiones

1. Se ha realizado un estudio del Modus Tollens respecto de uninormas conjuntivas.

Conclusiones

1. Se ha realizado un estudio del Modus Tollens respecto de uninormas conjuntivas.

2. Se han dado diversas propiedades necesarias para su cumplimiento y caracterizaciones de las soluciones en diversos casos concretos.

Conclusiones

1. Se ha realizado un estudio del Modus Tollens respecto de uninormas conjuntivas.
2. Se han dado diversas propiedades necesarias para su cumplimiento y caracterizaciones de las soluciones en diversos casos concretos.

Conclusiones

1. Se ha realizado un estudio del Modus Tollens respecto de uninormas conjuntivas.
2. Se han dado diversas propiedades necesarias para su cumplimiento y caracterizaciones de las soluciones en diversos casos concretos.
3. Se ha estudiado también el caso de *RU*-implicaciones derivadas de uninormas de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$, de uninormas representables y de uninormas idempotentes.

Trabajo Futuro

1. Hacer un estudio más exhaustivo de los casos de RU-implicaciones derivadas de uninormas representables e idempotentes.

Trabajo Futuro

1. Hacer un estudio más exhaustivo de los casos de RU-implicaciones derivadas de uninormas representables e idempotentes.

Trabajo Futuro

1. Hacer un estudio más exhaustivo de los casos de RU-implicaciones derivadas de uninormas representables e idempotentes.
2. Extender el Modus Tollens a RU -implicaciones derivadas de otros tipos de uninormas.

Gracias por su atención