Universitat de les Illes Balears

#SOM UIB

Negaciones naturales asociadas a t-subnormas discretas

S. Massanet **J. V. Riera** **J. Torrens**

SCOPIA research group
Dept. Maths and Computer Science
University of the Balearic Islands
Palma, Mallorca

Institut d'Investigació Sanitària Illes Balears

Balearic Islands Health Research Institute (IdISBa)
Palma, Mallorca

http://scopia.uib.eu

CAEPIA 2018
Granada
XVIII Conference of the Spanish Association for Artificial Intelligence

Índice

Motivación: Del $[0, 1]$ a las cadenas finitas

Del $[0, 1]$ a las cadenas finitas

En muchas situaciones prácticas en las que los cálculos y los razonamientos deben de ser reducidos a un número finito de posibles valores, a menudo cualitativos, **el enfoque lingüístico borroso** es un marco adecuado para modelar dicha información.

En este caso, los términos cualitativos usados por los expertos son usualmente representados por variables lingüísticas en lugar de valores numéricos, que se valoran en cadenas finitas totalmente ordenadas tales como:

$$L = \{\text{Extremadamene Malo}, \text{Muy Malo}, \text{Malo}, \text{Regular},$$

$$\text{Bueno}, \text{Muy Bueno}, \text{Extremadamente Bueno}\},$$

que pueden ser todas representadas por la cadena finita $L_n = \{0, 1, \ldots, n\}$.

Funciones de agregación discretas

Consecuentemente, muchos investigadores han centrado sus investigaciones en el estudio de operaciones definidas en L_n, o **operaciones discretas**.

Entre las diferentes operaciones discretas, las funciones de agregación discretas destacan por su importancia debido a la necesidad de fusionar un conjunto inicial de datos en uno final que los represente. Existen muchos ejemplos de posibles aplicaciones:

Funciones de agregación discretas

Consecuentemente, muchos investigadores han centrado sus investigaciones en el estudio de operaciones definidas en L_n, o **operaciones discretas**.

Entre las diferentes operaciones discretas, las funciones de agregación discretas destacan por su importancia debido a la necesidad de fusionar un conjunto inicial de datos en uno final que los represente. Existen muchos ejemplos de posibles aplicaciones:

- procesos de decisión,
- procesamiento de imágenes o reconocimiento de patrones
- razonamiento aproximado.

Funciones de agregación discretas

Muchas familias de funciones de agregación discretas han sido también estudiadas o incluso caracterizadas. Por ejemplo:

- t-normas y t-conormas suaves,
- t-subnormas suaves,
- medias ordinales ponderadas,
- uninormas en $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ y $\mathcal{U}_{\text{máx}}$ y nulnormas,
- uninormas idempotentes discretas,
- uninormas y nulnormas no conmutativas,
- cópulas y cuasi-cópulas.

t-subnormas discretas

En esta presentación, estudiaremos algunos resultados sobre **t-subnormas discretas**.

Definición

Sea $T : L_n^2 \to L_n$ *una operación binaria sobre* L_n*. Se dice que* T *es una t-subnorma cuando* T *es asociativa, conmutativa, creciente en cada variable y verifica* $T(x, y) \leq \text{mín}\{x, y\}$ *para todo* $x, y \in L_n$*.*

t-subnormas discretas

Estas operaciones son importantes entre otras razones porque:

1. Generalizan la familia de t-normas discretas.
2. Pueden ser vistas como un caso particular de subgrupo topológico ordenado.

t-subnormas en $[0, 1]$

Recientemente, si nos centramos en $[0, 1]$, se ha estudiado que las propiedades de las negaciones naturales asociadas a t-subnormas sobre $[0, 1]$ son decisivas cuando estudiamos su relación con t-normas que verifican:

- la propiedad Arquimediana,
- la cancelatividad condicional,
- la continuidad por la izquierda,
- elementos nilpotentes.

Objetivo

Desarrollaremos un estudio similar para el caso de t-subnormas discretas, investigando la negación natural asociada a estos operadores discretos y presentando varias ideas sobre su estructura.

Preliminares

Función suave

Definición

- *Una función* $f : L_n \to L_n$ *se dice que es suave cuando* $\mid f(x) - f(x-1) \mid \leq 1$ *para todo* $x \in L_n$ *con* $x \geq 1$.
- *Una operación binaria* F *sobre* L_n *se dice que es suave cuando sus secciones, vertical y horizontal, lo son.*

Generalmente esta propiedad es usada en el caso discreto de manera equivalente a la continuidad en el intervalo $[0, 1]$, ya que es equivalente a la de divisibilidad.

t-normas discretas

Definición

Sea $T : L_n^2 \to L_n$ *una operación binaria sobre* L_n*. Diremos que* T *es una t-norma cuando* T *sea asociativa, conmutativa, no decreciente en cada variable y verificando que* $T(n, x) = x$ *para todo* $x \in L_n$*.*

t-normas discretas

Definición

Sea $T : L_n^2 \to L_n$ una operación binaria sobre L_n. Diremos que T es una t-norma cuando T sea asociativa, conmutativa, no decreciente en cada variable y verificando que $T(n, x) = x$ para todo $x \in L_n$.

Cualquier t-norma sobre L_n es también una t-subnorma pero no viceversa.

t-normas discretas: sumas ordinales

Proposición

Consideremos $m+1$ elementos de la cadena L_n dados por $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m = n$ y sea T_i una t-norma definida sobre la cadena $[a_{i-1}, a_i]$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Entonces, la operación binaria sobre L_n dada por $T(x, y) =$

$$\begin{cases} T_i(x,y) & \textit{si existe un } i \textit{ tal que } a_{i-1} \leq x, y \leq a_i, \\ \text{mín}\{x,y\} & \textit{en otro caso,} \end{cases}$$

es siempre una t-norma en L_n usualmente llamada suma ordinal de las t-normas $T_1, \ldots, T_m$.

t-normas discretas: sumas ordinales suaves

Proposición

Existe una y solo una t-norma Arquimediana y suave sobre L_n dada por la expresión

$$T(x, y) = \text{máx}\{0, x + y - n\} \tag{1}$$

conocida habitualmente como la t-norma de Łukasiewicz.

t-normas discretas: sumas ordinales suaves

Proposición

Existe una y solo una t-norma Arquimediana y suave sobre L_n dada por la expresión

$$T(x, y) = \text{máx}\{0, x + y - n\} \tag{1}$$

conocida habitualmente como la t-norma de Łukasiewicz.

Proposición

Una t-norma T sobre L_n es suave si y solo si existe un número natural m con $1 \leq m \leq n$ y un subconjunto J de L_n,

$$J = \{0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m = n\}$$

tal que T viene dada por $T(x, y) =$

$$\begin{cases} \text{máx}\{a_k, x + y - a_{k+1}\} & \textit{si existe } a_k \in J \\ & \textit{con } a_k \leq x, y \leq a_{k+1}, \\ \text{mín}\{x, y\} & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Algunas propiedades de las negaciones discretas

Empecemos con un conocido resultado.

Proposición

La única negación suave (equivalentemente fuerte o estrictamente decreciente) sobre L_n es la negación clásica dada por

$$N(x) = n - x \quad \text{para todo} \quad x \in L_n.$$

Sin embargo, en el caso en que no sea suave la negación aparecen otras posibilidades.

Negaciones débiles y simétricas

Definición

Sea $N : L_n \rightarrow L_n$ *una negación discreta.*

- N *es una negación débil si* $x \leq N^2(x)$ *para todo* $x \in L_n$.
- N *se dice simétrica cuando el conjunto*

$$F_N = \{(n, 0)\} \cup \{(x, y) \in L_n^2 \mid N(x + 1) \leq y \leq N(x)\}$$

  es simétrico, esto es, $(x, y) \in F_N$ *si y solo si* $(y, x) \in F_N$.

Primera diferencia con respecto del caso sobre $[0, 1]$

En el caso de negaciones definidas sobre el intervalo $[0, 1]$, las negaciones débiles y simétricas no coinciden en general, y solo coinciden en el caso en que N sea continua por la izquierda. El siguiente ejemplo ilustra este hecho:
Sea

$$N(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0{,}25, \\ 1{,}25 - x & \text{si } 0{,}25 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Es fácil probar que N es simétrica, pero claramente no es una negación débil ya que para todo x tal que $0 < x \leq 0{,}25$ se verifica que
$N^2(x) = N(1) = 0 < x$.
Pero,...

Primera diferencia con respecto del caso sobre $[0, 1]$

Proposición

Sea $N : L_n \to L_n$ una negación discreta. Las siguientes propiedades son equivalentes:

i) *N es simétrica.*

ii) *N es una negación débil.*

iii) *Para todo $(x, y) \in L_n^2$ se verifica:*

$$y \leq N(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq N(y).$$

Ejemplo

Consideremos $\alpha \in L_n$ *y sea* N_α *dada por*

$$N_\alpha(x) = \begin{cases} n & si\ x = 0, \\ \alpha - x & si\ 0 < x < \alpha, \\ 0 & si\ x \geq \alpha. \end{cases}$$

Claramente N_α *es una negación débil para todo* $\alpha \in L_n$*. Además, si* $\alpha = 0$ *obtenemos* N_0 *la negación drástica, mientras que si* $\alpha = n$ *obtenemos la negación clásica* $N_n(x) = n - x$*.*

t-subnormas discretas y sus negaciones asociadas

0-función asociada(N_T)

Definición

Para cada t-subnorma discreta $T : L_n \times L_n \to L_n$, llamaremos 0-función asociada (denotada por N_T) a aquella dada por

$$N_T(x) = \text{máx}\{z \in L_n \mid T(x, z) = 0\}.$$

0-función asociada(N_T)

Definición

Para cada t-subnorma discreta $T : L_n \times L_n \to L_n$ *, llamaremos 0-función asociada (denotada por* N_T*) a aquella dada por*

$$N_T(x) = \text{máx}\{z \in L_n \mid T(x,z) = 0\}.$$

Destacar que en general $N_T(n) \neq 0$.
Así, cuando $N_T(n) = 0$, la llamaremos *negación natural asociada* a la t-subnorma T.

Algunos ejemplos

Ejemplo

1. *Si* $n = 1$, *la t-subnorma cero (con 0-función asociada dada por* $N(x) = 1$ *para* $x \in \{0, 1\}$, *no es una negación), y la t-norma mínimo (con la negación clásica como negación natural asociada) son las únicas t-subnormas sobre* $L_1 = \{0, 1\}$.
2. *Cuando* $n = 2$ *hay exactamente siete t-subnormas sobre* L_2 *que pueden ser fácilmente construidas, de las cuales solo dos de ellas son t-normas. En cualquier caso, las únicas posibilidades de 0-funciones asociadas son:*
   - *La función constante* $N(x) = 2$ *para todo* $x \in L_2 = \{0, 1, 2\}$.
   - $N(x) = \begin{cases} 2 & si\ x \in \{0, 1\}, \\ 1 & si\ x = 2. \end{cases}$
   - *La negación clásica* $N(x) = 2 - x$.
   - *La negación drástica* $N(x) = \begin{cases} 2 & si\ x = 0, \\ 0 & si\ x \in \{1, 2\}. \end{cases}$

   Claramente, solo los dos últimos casos son negaciones discretas.

t-subnormas con negación natural asociada

En el caso discreto tenemos una fácil caracterización de las t-subnormas que verifican que N_T es una negación.

Lema

Sea $T : L_n^2 \to L_n$ una t-subnorma discreta. La 0-función asociada a T es una negación discreta si y solo si $T(n, 1) = 1$.

Además, N_T resulta ser una negación débil y esta propiedad caracteriza de hecho las negaciones que estan asociadas a una t-subnorma satisfaciendo $T(n, 1) = 1$ (equivalentemente aquellas que estan asociadas a alguna t-norma) de la siguiente manera:

t-subnormas con negación natural asociada

Proposición

Sea $N : L_n \to L_n$ una negación discreta. Los siguientes ítems son equivalentes:

i) *Existe una t-norma T tal que $N = N_T$.*

ii) *Existe una t-subnorma T verificando $T(n, 1) = 1$ tal que $N = N_T$.*

iii) *N es una negación débil.*

t-subnormas con negación natural asociada

Proposición

Sea $T : L_n^2 \to L_n$ *una t-subnorma discreta con negación natural asociada* $N_T(x) = n - x$. *Entonces, necesariamente* T *es una t-norma.*

t-subnormas con negación natural asociada

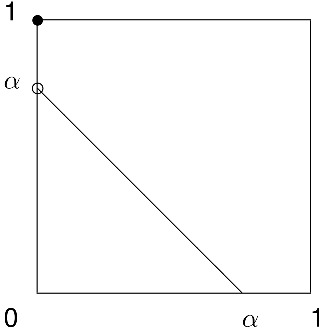
Proposición

Sea $T : L_n^2 \to L_n$ *una t-subnorma discreta con negación natural asociada* $N_T(x) = n - x$*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i) T *es condicionalmente cancelativa.*
- ii) T *es estrictamente creciente en su región positiva.*
- iii) T *es suave.*
- iv) T *es la t-norma de Łukasiewicz.*

t-subnormas con negación natural asociada

Por otra parte, podemos caracterizar no solo aquellas t-subnormas que tienen como negación natural asociada la negación clásica. Si consideramos esta familia parametrizada de negaciones N_α,



t-subnormas con negación natural asociada

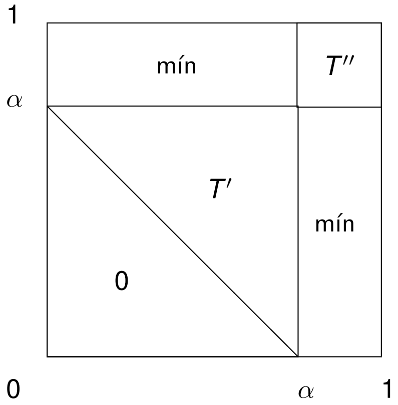
Proposición

Sea $T : L_n^2 \to L_n$ una t-subnorma discreta. Se verifican los siguientes resultados:

i) *N_α es la negación natural asociada a T si y solo si T es una suma ordinal de una t-norma T' sobre $[0, \alpha]$ con la negación clásica $N(x) = \alpha - x$ como negación asociada y una t-subnorma T'' sobre $[\alpha, 1]$.*

ii) *Si T es suave entonces N_α es la negación natural asociada a T si y solo si T es suma ordinal de la t-norma de Łukasiewicz sobre $[0, \alpha]$ y una t-subnorma suave T'' sobre $[\alpha, 1]$.*

t-subnormas con negación natural asociada



t-subnormas con negación natural asociada

Cuando una negación discreta N es la negación asociada de alguna t-subnorma, también lo es de alguna t-norma. Sin embargo, hay más t-subnormas que t-normas que tengan una determinada negación débil como su negación asociada.

Conclusiones y trabajo futuro

Conclusiones

En este trabajo hemos:

- estudiado las negaciones naturales asociadas a t-subnormas discretas,
- demostrado la equivalencia entre negaciones débiles y negaciones simétricas en el entorno discreto,
- demostrado varios resultados sobre la relación existente entre t-subnormas discretas y t-normas discretas a partir de las propiedades de sus negaciones naturales asociadas.

Trabajo futuro

Como trabajo futuro, queremos analizar este tema desde otra perspectiva, esto es, si fijamos una negación débil N, ¿qué t-normas T pueden ser consideradas para conseguir una nueva t-norma T' tal que $N_{T'} = N$ y $T'(x,y) = T(x,y)$ para todo $y > N(x)$? Equivalentemente, caracterizar aquellas t-normas T cuyo operador

$$T'(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq N(x), \\ T(x,y) & \text{si } y > N(x), \end{cases}$$

es una t-norma.

¡Muchas gracias por su atención!