Caracterizaciones y equivalencias de algunas familias de funciones de implicación borrosas generadas a partir de cópulas

S. Massanet A. Pradera D. Ruiz-Aguilera J. Torrens

Dept. Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears
Palma, Mallorca

Dept. Ciencias Computación, Arquitectura de Computadores, Lenguajes y Sistemas Informáticos y Estadística e Investigación Operativa
Universidad Rey Juan Carlos
Móstoles, Madrid

Universitat de les Illes Balears

#SOM UIB

SCOPIA

Universidad Rey Juan Carlos

CAEPIA 2018
Granada
XVIII Conferencia de la Asociación Española de Inteligencia Artificial

http://scopia.uib.cat

Índice

La necesidad inevitable de caracterizar las familias de funciones de implicación borrosas

Funciones de implicación borrosas

Las funciones de implicación borrosas han sido extensamente estudiadas en los últimos años por la gran cantidad de aplicaciones que tienen. Como para cada aplicación, es necesario escoger una función de implicación borrosa que satisfaga unas propiedades adicionales concretas es necesario disponer de un ámplio abanico de estos operadores. Así,

Funciones de implicación borrosas

Las funciones de implicación borrosas han sido extensamente estudiadas en los últimos años por la gran cantidad de aplicaciones que tienen. Como para cada aplicación, es necesario escoger una función de implicación borrosa que satisfaga unas propiedades adicionales concretas es necesario disponer de un ámplio abanico de estos operadores. Así,

- más de 40 funciones de implicación borrosas se han utilizado sólo en teoría de control,

Funciones de implicación borrosas

Las funciones de implicación borrosas han sido extensamente estudiadas en los últimos años por la gran cantidad de aplicaciones que tienen. Como para cada aplicación, es necesario escoger una función de implicación borrosa que satisfaga unas propiedades adicionales concretas es necesario disponer de un ámplio abanico de estos operadores. Así,

- más de 40 funciones de implicación borrosas se han utilizado sólo en teoría de control,
- se han propuesto un gran número de familias de funciones de implicación borrosas.

Nueva noticia en el Fuzzy Journal

The Fuzzy Journal

24 OCT 2018

A new family of fuzzy implication functions has been discovered

By A CHINESE RESEARCHER

Esta definición permite la existencia de una infinidad de familias de funciones de implicación borrosas. Cada una de estas familias satisface alguna propiedades adicionales que son útiles para algunas de las aplicaciones anteriormente mencionadas. De esta manera, dependiendo de la aplicación considerada, se puede escoger la función de implicación borrosa que satisface las propiedades adicionales deseables. Sin embargo, esta necesidad de disponer de un repertorio extenso de estos operadores ha tenido un efecto no deseado. En los últimos años, se han propuesto multitud de familias, algunas de una complejidad notable, cuya caracterización se desconoce. Esto ha provocado la aparición de familias, que aunque fueron presentadas como nuevas familias, después de estudiarlas en profundidad y obtener su caracterización, se demostró que tenían intersección o incluso que coincidían con familias ya conocidas. Por tanto, es de suma importancia caracterizar las familias de funciones de implicación borrosas introducidas hasta la fecha para conocer el comportamiento de cada familia y su relación con las demás.

La caracterización y representación de los conectivos lógicos borrosos es una de las principales líneas de investigación en el campo teórico en lógica borrosa. Como consecuencia de este estudio, se ha conseguido caracterizar de forma axiomática un gran número de familias de conectivos lógicos borrosos. Por un lado, en el campo de las funciones de agregación, se han caracterizado varias familias de t-normas y t-conormas, cópulas y uninormas, entre otros operadores. Por otro lado, hay que destacar el esfuerzo de muchos investigadores en la caracterización de las familias de funciones de implicación borrosa. Así, se han caracterizado las (S,N)-implicaciones con N una negación borrosa continua, las R-implicaciones generadas a partir de t-normas continuas por la izquierda, sus respectivas generalizaciones derivadas de uninormas, las implicaciones f y g-generadas de Yager o las h-implicaciones, entre otras. La importancia de estos operadores radica en el gran número de aplicaciones que tienen en campos tan diversos como el razonamiento aproximado, el control borroso, el procesamiento de imágenes o la minería de datos. Se pueden consultar todas estas aplicaciones, en.

La caracterización y representación de los conectivos lógicos borrosos es una de las principales líneas de investigación en el campo teórico en lógica borrosa. Como consecuencia de este estudio, se ha conseguido caracterizar de forma axiomática un gran número de familias de conectivos lógicos borrosos. Por un lado, en el campo de las funciones de agregación, se han caracterizado varias familias de t-normas y t-conormas, cópulas y uninormas, entre otros operadores. Por otro lado, hay que destacar el esfuerzo de muchos investigadores en la caracterización de las familias de funciones de implicación borrosa. Así, se han caracterizado las (S,N)-implicaciones con N una negación borrosa continua, las R-implicaciones generadas a partir de t-normas continuas por la izquierda, sus respectivas generalizaciones derivadas de uninormas, las implicaciones f y g-generadas de Yager o las h-implicaciones, entre otras. La importancia de estos operadores radica en el gran número de aplicaciones que tienen en campos tan diversos como el razonamiento aproximado, el control borroso, el procesamiento de imágenes o la minería de datos. Se pueden consultar todas estas aplicaciones, en.

La caracterización y representación de los conectivos lógicos borrosos es una de las principales líneas de investigación en el campo teórico en lógica borrosa. Como consecuencia de este estudio, se ha conseguido caracterizar de forma axiomática un gran número de familias de conectivos lógicos borrosos. Por un lado, en el campo de las funciones de agregación, se han caracterizado varias familias de t-normas y t-conormas, cópulas y uninormas, entre otros operadores. Por otro lado, hay que destacar el esfuerzo de muchos investigadores en la caracterización de las familias de funciones de implicación borrosa. Así, se han caracterizado las (S,N)-implicaciones con N una negación borrosa continua, las R-implicaciones generadas a partir de t-normas continuas por la izquierda, sus respectivas generalizaciones derivadas de uninormas, las implicaciones f y g-generadas de Yager o las h-implicaciones, entre otras. La importancia de estos operadores radica en el gran número de aplicaciones que tienen en campos tan diversos como el razonamiento aproximado, el control borroso, el procesamiento de imágenes o la minería de datos. Se pueden consultar todas estas aplicaciones, en.

Funciones de implicación borrosas

La definición de una función de implicación borrosa es suficientemente flexible como para permitir la existencia de un gran número de funciones de implicación borrosas.

Definition

Un operador binario $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ se dice que es una *función de implicación borrosas* si satisface:

(I1) $I(x,z) \geq I(y,z)$ cuando $x \leq y$, para todo $z \in [0,1]$.

(I2) $I(x,y) \leq I(x,z)$ cuando $y \leq z$, para todo $x \in [0,1]$.

(I3) $I(0,0) = I(1,1) = 1$ e $I(1,0) = 0$.

Propiedades adicionales

Estos operadores pueden satisfacer propiedades adicionales que provienen usualmente de tautologías en lógica clásica.

1. *Principio de intercambio*:

$$I(x, I(y, z)) = I(y, I(x, z)), \quad \text{para todos } x, y, z \in [0, 1]. \qquad (\mathbf{EP})$$

2. *Ley de importación* con respecto a una t-norma T:

$$I(T(x, y), z) = I(x, I(y, z)), \quad \text{para todos} \quad x, y, z \in [0, 1]. \qquad (\mathbf{LI_T})$$

3. *Principio de neutralidad por la izquierda*:

$$I(1, y) = y \qquad \text{para todo} \quad y \in [0, 1]. \qquad (\mathbf{NP})$$

Propiedades adicionales

Estos operadores pueden satisfacer propiedades adicionales que provienen usualmente de tautologías en lógica clásica.

1. *Principio de orden*:

$$x \leq y \iff I(x, y) = 1 \quad \text{para todo} \quad x, y \in [0, 1]. \qquad (\mathbf{OP})$$

2. *Principio de identidad*:

$$I(x, x) = 1 \quad \text{para todo} \quad x \in [0, 1]. \qquad (\mathbf{IP})$$

3. *Contrapositivización* con respecto a una negación borrosa N,

$$I(x, y) = I(N(y), N(x)), \quad \text{para todos } x, y \in [0, 1]. \qquad (\mathbf{CP}(\mathbf{N}))$$

Propiedades adicionales

Estos operadores pueden satisfacer propiedades adicionales que provienen usualmente de tautologías en lógica clásica.

1. Propiedades de la *negación natural* de I dada por $N_I(x) = I(x, 0)$ para todo $x \in [0, 1]$.
2. *2-crecimiento*,
$$I(x, y') + I(x', y) \leq I(x', y') + I(x, y), \quad \text{para todos } x' \leq x, \quad y' \leq y.$$
3. *Invariancia* con respecto a las potencias de una t-norma T,
$$I(x, y) = I\left(x_T^{(r)}, y_T^{(r)}\right) \tag{$\mathbf{PI_T}$}$$
para todo $r > 0$ y $x, y \in [0, 1]$ tales que $x_T^{(r)}, y_T^{(r)} \neq 0, 1$.

Estrategias para generar nuevas familias

Existen tres estrategias principales para generar nuevas familias de funciones de implicación borrosas:

Estrategias para generar nuevas familias

Existen tres estrategias principales para generar nuevas familias de funciones de implicación borrosas:

1. Aquéllas basadas en combinaciones de otros conectivos lógicos (funciones de agregación, negaciones borrosas...): (S, N), R, QL, D, etc.

Estrategias para generar nuevas familias

Existen tres estrategias principales para generar nuevas familias de funciones de implicación borrosas:

1. Aquéllas basadas en combinaciones de otros conectivos lógicos (funciones de agregación, negaciones borrosas. . .): (S, N), R, QL, D, etc.
2. Aquéllas basadas en el uso de generadores aditivos univaluados: f y g-generadas de Yager, h y (h, e)-implicaciones, etc.

Estrategias para generar nuevas familias

Existen tres estrategias principales para generar nuevas familias de funciones de implicación borrosas:

1. Aquéllas basadas en combinaciones de otros conectivos lógicos (funciones de agregación, negaciones borrosas. . .): (S, N), R, QL, D, etc.
2. Aquéllas basadas en el uso de generadores aditivos univaluados: f y g-generadas de Yager, h y (h, e)-implicaciones, etc.
3. Aquéllas basadas en el uso de otras funciones de implicación borrosas: φ-conjugación, métodos de umbral horizontal y vertical, etc.

La necesidad de la caracterización

De tanto en cuanto aparecen“nuevas” familias de funciones de implicación borrosas. Sin embargo, más adelante se demuestra que tienen intersección con algunas de las familias ya existentes o ¡incluso que son la misma familia!

Solución

Caracterizar axiomáticamente las familias de funciones de implicación borrosas para conocer mejor su estructura y comportamiento.

Funciones de implicación borrosas basadas en cópulas

Recientemente, se han propuesto algunas familias de funciones de implicación borrosas generadas a partir de cópulas. Concretamente,

- implicaciones probabilísticas,
- implicaciones S-probabilísticas,
- implicaciones de supervivencia,
- implicaciones de S-supervivencia.

Funciones de implicación borrosas basadas en cópulas

Recientemente, se han propuesto algunas familias de funciones de implicación borrosas generadas a partir de cópulas. Concretamente,

- implicaciones probabilísticas,
- implicaciones S-probabilísticas,
- implicaciones de supervivencia,
- implicaciones de S-supervivencia.

En palabras del mismo Prof. Grzegorzewski,

> *Estas familias de funciones de implicación borrosas toman en consideración tanto la imprecisión modelada por los conceptos borrosos como la aleatoriedad descrita por las herramientas originarias de la teoría de probabilidades.*

Cópulas

Definition (Nelsen 2006)

Una función $C : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ es una *cópula* si satisface:

- $C(0,x) = C(x,0) = 0$ para todo $x \in [0,1]$.
- $C(1,x) = C(x,1) = x$ para todo $x \in [0,1]$.
- C es 2-creciente, esto es, para todo $x' \leq x$ e $y' \leq y$ se satisface

$$C(x,y') + C(x',y) \leq C(x',y') + C(x,y).$$

Cópulas

Definition (Nelsen 2006)

Una función $C : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ es una *cópula* si satisface:

- $C(0,x) = C(x,0) = 0$ para todo $x \in [0,1]$.
- $C(1,x) = C(x,1) = x$ para todo $x \in [0,1]$.
- C es 2-creciente, esto es, para todo $x' \leq x$ e $y' \leq y$ se satisface

$$C(x,y') + C(x',y) \leq C(x',y') + C(x,y).$$

Definición (Nelsen 2006)

Dada una cópula C, la *cópula de supervivencia* es la cópula C^* que viene dada por

$$C^*(x,y) = x + y - 1 + C(1-x, 1-y), \quad \text{para todos } x,y \in [0,1].$$

Funciones de implicación borrosas basadas en cópulas

Estas familias son las siguientes:

Funciones de implicación borrosas basadas en cópulas

Estas familias son las siguientes:

1) *Implicaciones probabilísticas*:

$$I_C(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ \frac{C(x,y)}{x} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

donde C es una cópula que satisface
$C(x_1, y)x_2 \geq C(x_2, y)x_1$ para todo $x_1 \leq x_2$ e $y \in [0, 1]$.

Funciones de implicación borrosas basadas en cópulas

Estas familias son las siguientes:

1) *Implicaciones probabilísticas*:

$$I_C(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ \frac{C(x,y)}{x} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

donde C es una cópula que satisface
$C(x_1,y)x_2 \geq C(x_2,y)x_1$ para todo $x_1 \leq x_2$ e $y \in [0,1]$.

2) *Implicaciones de supervivencia*:

$$I^*_C(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ \frac{x+y-1+C(1-x,1-y)}{x} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

donde C es una cópula que satisface
$C(1-x_1,1-y)x_2 - C(1-x_2,1-y)x_1 \geq (1-y)(x_2-x_1)$ para todo $x_1 \leq x_2$ e $y \in [0,1]$.

Funciones de implicación borrosas basadas en cópulas

Funciones de implicación borrosas basadas en cópulas

3) *Implicaciones S-probabilísticas*: $\tilde{I}_C(x, y) = C(x, y) - x + 1$ donde C es una cópula.

Funciones de implicación borrosas basadas en cópulas

3) *Implicaciones S-probabilísticas*: $\tilde{I}_C(x, y) = C(x, y) - x + 1$ donde C es una cópula.
4) *Implicaciones de S-supervivencia*: $\tilde{I}^*_C(x, y) = y + C(1 - x, 1 - y)$ donde C es una cópula.

Caracterización de las implicaciones S-probabilísticas y de S-supervivencia

Caracterización de las implicaciones *S*-probabilísticas y de *S*-supervivencia

Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
Fuzzy Sets and Systems 323 (2017) 103–116
FUZZY sets and systems
www.elsevier.com/locate/fss

From three to one: Equivalence and characterization of material implications derived from co-copulas, probabilistic S-implications and survival S-implications

S. Massanet [a,*], A. Pradera [b], D. Ruiz-Aguilera [a], J. Torrens [a]

[a] Department of Mathematics and Computer Science, University of the Balearic Islands, Ctra. de Valldemossa, km 7.5, 07122 Palma, Balearic Islands, Spain
[b] Departamento de Ciencias de la Computación, Arquitectura de Computadores, Lenguajes y Sistemas Informáticos y Estadística e Investigación Operativa, Universidad Rey Juan Carlos, 28933 Móstoles, Madrid, Spain

Received 25 July 2016; received in revised form 26 October 2016; accepted 10 January 2017
Available online 14 January 2017

Abstract

Since their introduction in 2012 and 2013 by P. Grzegorzewski, probabilistic S-implications and survival S-implications have attracted the efforts of some researchers due to the connection that they represent between probability theory and fuzzy logic. In this paper, the characterizations of these two families of fuzzy implication functions are presented jointly with the characterization of the material implications derived from co-copulas and the classical negation. Even more, it is proved that the three families are actually the same. Thus every result concerning one of these families can be straightforwardly rewritten in terms of the other two families.

Keywords: Fuzzy implication function; Copula; 2-increasingness; Probabilistic S-implications; Survival S-implications; Material implications

1. Introduction

In recent years, fuzzy implication functions have become one of the main research lines of the fuzzy logic community. Besides being an indispensable tool in a great number of applications, the flexibility in their definition allows a huge theoretical study focused on the additional properties they can satisfy (see the surveys [5,25] and the whole books [1,4] devoted to these operators). Thus it is paramount to deeply analyze the application where a fuzzy implication function is needed in order to choose the operator which better fits the requirements of the researcher. Fuzzy implication functions were first applied in approximate reasoning models involving fuzzy conditionals [14,21,25] and backward and forward inferences through the inference rules of modus ponens and modus tollens [20,25,33].

* Corresponding author.
E-mail addresses: s.massanet@uib.es (S. Massanet), ana.pradera@urjc.es (A. Pradera), daniel.ruiz@uib.es (D. Ruiz-Aguilera), jts224@uib.es (J. Torrens).

http://dx.doi.org/10.1016/j.fss.2017.01.002

[1]

---

[1] S. Massanet y col. "From three to one: Equivalence and characterization of material implications derived from co-copulas, probabilistic S-implications and survival S-implications". En: *Fuzzy Sets and Systems* 323 (2017), págs. 103-116.

Caracterización de las implicaciones S-probabilísticas y de S-supervivencia

Teorema

Sea $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ *una función binaria. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

Caracterización de las implicaciones S-probabilísticas y de S-supervivencia

Teorema

Sea $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ *una función binaria. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

i) I *es una implicación* S*-probabilística generada por una cópula* C.

Caracterización de las implicaciones S-probabilísticas y de S-supervivencia

Teorema

Sea $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ una función binaria. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:

i) *I es una implicación S-probabilística generada por una cópula C.*

ii) *I es una implicación de S-supervivencia generada por una cópula C'.*

Caracterización de las implicaciones S-probabilísticas y de S-supervivencia

Teorema

Sea $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ *una función binaria. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

i) *I es una implicación S-probabilística generada por una cópula C.*

ii) *I es una implicación de S-supervivencia generada por una cópula C'.*

iii) *I es una implicación material generada por una co-cópula D y la negación borrosa N_c, i.e., $I(x,y) = D(1-x,y)$.*

Caracterización de las implicaciones S-probabilísticas y de S-supervivencia

Teorema

Sea $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ *una función binaria. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

i) I *es una implicación* S*-probabilística generada por una cópula* C.

ii) I *es una implicación de* S*-supervivencia generada por una cópula* C'.

iii) I *es una implicación material generada por una co-cópula* D *y la negación borrosa* N_c*, i.e.,* $I(x,y) = D(1-x,y)$.

iv) I *satisface* **(NP)**, **(2-IC)**, $N_I(x) = N_c(x) = 1 - x$ *e* $I(0,y) = I(x,1) = 1$ *para todo* $x, y \in [0,1]$.

Caracterización de las implicaciones S-probabilísticas y de S-supervivencia

Teorema

Sea $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ *una función binaria. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

i) I *es una implicación* S*-probabilística generada por una cópula* C.

ii) I *es una implicación de* S*-supervivencia generada por una cópula* C'.

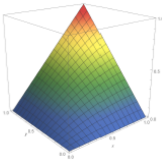
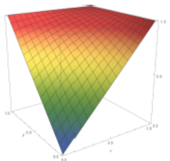
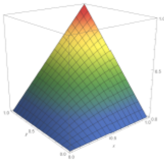
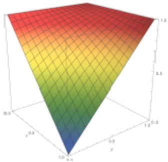
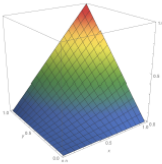
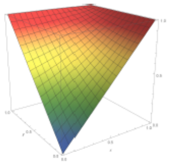
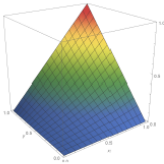
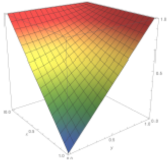
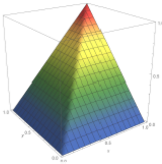
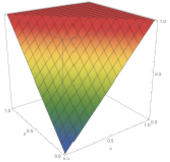
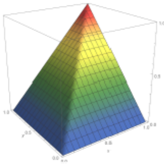
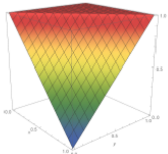
iii) I *es una implicación material generada por una co-cópula* D *y la negación borrosa* N_c*, i.e.,* $I(x,y) = D(1-x,y)$.

iv) I *satisface* **(NP)**, **(2-IC)**, $N_I(x) = N_c(x) = 1-x$ *e* $I(0,y) = I(x,1) = 1$ *para todo* $x, y \in [0,1]$.

Además, las expresiones de D, C *y* C' *son únicas y vienen dadas por*

$$\begin{aligned} D(x,y) &= I(1-x,y), \\ C(x,y) &= I(x,y) + x - 1, \\ C'(x,y) &= I(1-x,1-y) + y - 1, \end{aligned}$$

para todo $x, y \in [0,1]$.

Probabilistic S-implication derived from	Material implication derived from N_c and	Survival S-implication derived from	Fuzzy implication function
 (a) C_1^{FGM}	 (b) $((C_1^{\mathrm{FGM}})_{0,1})^d$	 (c) $(C_1^{\mathrm{FGM}})^\star$	 (d) I_1
 (e) $(C_{-1}^{\mathrm{AMH}})^\star$	 (f) $((C_{-1}^{\mathrm{AMH}})_{1,0})^d$	 (g) C_{-1}^{AMH}	 (h) I_2
 (i) $W_{0,1}$	 (j) W^d	 (k) $W_{1,0}$	 (l) I_3

Caracterización de las implicaciones probabilísticas y de supervivencia

Caracterización de las implicaciones probabilísticas y de supervivencia

ARTICLE IN PRESS FSS:7457

Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

Fuzzy Sets and Systems ••• (••••) •••–•••

ELSEVIER

FUZZY sets and systems

www.elsevier.com/locate/fss

Equivalence and characterization of probabilistic and survival implications

Sebastia Massanet [a,b,*], Ana Pradera [c], Daniel Ruiz-Aguilera [a,b], Joan Torrens [a,b]

[a] *Department of Mathematics and Computer Science, University of the Balearic Islands, 07122 Palma, Balearic Islands, Spain*
[b] *Balearic Islands Health Research Institute (IdISBa), 07010 Palma, Spain*
[c] *Departamento de Ciencias de la Computación, Arquitectura de Computadores, Lenguajes y Sistemas Informáticos y Estadística e Investigación Operativa, Universidad Rey Juan Carlos, 28933 Móstoles, Madrid, Spain*

Received 28 March 2018; received in revised form 15 May 2018; accepted 30 June 2018

Abstract

Probabilistic and survival implications are two kinds of fuzzy implication functions that combine the imprecision modelled by fuzzy concepts and the imprecision modelled by the probability theory. Both kinds of fuzzy implication functions are derived from copulas through two different construction methods, and since their introduction in 2011 and 2012 respectively, they have been deeply studied. In this paper an axiomatic characterization of both families is given and it is proved that both families coincide. The mentioned characterizations are obtained by reversing these construction methods in order to obtain copulas from fuzzy implication functions. As it is expected the so-called 2-increasingness property on fuzzy implication functions plays an important role in the characterization theorems.

Keywords: Fuzzy implication function; Copula; Probabilistic implication; Survival implication; Aggregation function

1. Introduction

Fuzzy implication functions are a kind of logical operators that are used to model fuzzy conditionals in any fuzzy rule-based system. Due to their role in fuzzy logic, they have become an essential tool in fuzzy control and approximate reasoning. Moreover, fuzzy implication functions have proved to be useful in many other fields that vary from fuzzy preference modelling and decision making, to fuzzy subsethood measures and image processing [11–13,20–22,32]. This great quantity of applications has led to a systematic study of fuzzy implication functions also from a theoretical point of view and many results in this direction have been published in last decades (see the books and reviews [2,5,6,25] and the references therein).

* Corresponding author.
E-mail addresses: s.massanet@uib.es (S. Massanet), ana.pradera@urjc.es (A. Pradera), daniel.ruiz@uib.es (D. Ruiz-Aguilera), jts224@uib.es (J. Torrens).

https://doi.org/10.1016/j.fss.2018.06.014

Please cite this article in press as: S. Massanet et al., Equivalence and characterization of probabilistic and survival implications, Fuzzy Sets Syst. (2018), https://doi.org/10.1016/j.fss.2018.06.014

2

---

[2] S. Massanet y col. “Equivalence and characterization of probabilistic and survival implications”. En: *Fuzzy Sets and Systems* (2018). Artículo en prensa. DOI=10.1016/j.fss.2018.06.014.

Caracterización de las implicaciones probabilísticas y de supervivencia

Teorema

Sea $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ *una función binaria. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

Caracterización de las implicaciones probabilísticas y de supervivencia

Teorema

Sea $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ *una función binaria. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

i) I *es una implicación probabilística derivada de una cópula* C.

Caracterización de las implicaciones probabilísticas y de supervivencia

Teorema

Sea $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ *una función binaria. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

i) *I es una implicación probabilística derivada de una cópula C.*

ii) *I es una implicación de supervivencia derivada de una cópula C'.*

Caracterización de las implicaciones probabilísticas y de supervivencia

Teorema

Sea $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ *una función binaria. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

i) *I es una implicación probabilística derivada de una cópula C.*

ii) *I es una implicación de supervivencia derivada de una cópula C'.*

iii) *I satisface* **(I1)**, **(NP)**, *$I(0,y) = 1$ para todo $y \in [0,1]$, la propiedad*

$$x_2 I(x_2, y_1) + x_1 I(x_1, y_2) \leq x_1 I(x_1, y_1) + x_2 I(x_2, y_2)$$

para todo $x_1 \leq x_2$ e $y_1 \leq y_2$ y $N_I(x) = N_{D_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Caracterización de las implicaciones probabilísticas y de supervivencia

Teorema

Sea $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ *una función binaria. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

i) I *es una implicación probabilística derivada de una cópula* C.

ii) I *es una implicación de supervivencia derivada de una cópula* C'.

iii) I *satisface* **(I1)**, **(NP)**, $I(0,y) = 1$ *para todo* $y \in [0,1]$, *la propiedad*

$$x_2 I(x_2, y_1) + x_1 I(x_1, y_2) \leq x_1 I(x_1, y_1) + x_2 I(x_2, y_2)$$

para todo $x_1 \leq x_2$ *e* $y_1 \leq y_2$ *y* $N_I(x) = N_{D_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Además, las expresiones de C *y* C' *son únicas y vienen dadas por*

$$\begin{aligned} C(x,y) &= xI(x,y), \\ C'(x,y) &= x + y - 1 + (1-x)I(1-x, 1-y), \end{aligned}$$

para todo $x, y \in [0,1]$.

Función I	$N_I = N_{D_1}$	**(I1)**	**(NP)**	(2-IC) mod	$I(0,y)=1$
$I_{\mathbf{L}}(x,y) = \text{mín}(1, 1-x+y)$	X	✓	✓	✓	✓
$I_W(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \text{máx}\{0, 1+\frac{y-1}{x}\} & \text{si } x > 0 \end{cases}$	✓	X	✓	✓	✓
$I(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \text{ r } y = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$	✓	✓	X	✓	✓
$I(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \text{ e } y = 0 \\ y & \text{si } x = 1 \text{ e } y > 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$	✓	✓	✓	X	✓
$I(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y = 0 \\ y & \text{en otro caso} \end{cases}$	✓	✓	✓	✓	X

Cuadro: Independencia mútua de las propiedades.

La coincidencia de estas dos familias puede demostrarse de forma alternativa:

Teorema

Sea C una cópula y sea I una función binaria. Entonces I es una implicación probabilística derivada de la cópula C si, y sólo si, I es una implicación de supervivencia derivada de la cópula C^*. Esto es, $I_C = I^*_{C^*}$ o, equivalentemente, $I_{C^*} = I^*_C$.

Conclusiones

Conclusiones

En estos dos trabajos,

- se han caracterizado **cinco** familias de implicaciones,
- se ha demostrado la equivalencia entre:
  - por una parte, las implicaciones S-probabilísticas, de S-supervivencia y las implicaciones materiales derivadas de una co-cópula y N_c,
  - por otra parte, las implicaciones probabilísticas y de supervivencia.

Consecuencias

- Existen dos familias a estudiar, no cinco.
- Para estudiar una propiedad adicional, se puede escoger aquella familia que pueda resultar más sencilla de estudiar.
- Una vez obtenidos los resultados, se pueden reescribir en función de las otras familias.

Consecuencias

Hay que evitar estudiar las mismas propiedades para dos familias equivalentes. Por ejemplo, en los artículos[3],[4].

[3] M. Baczynski y col. “Properties of the probabilistic implications and S-implications”. En: *Inf. Sci.* 331 (2016), págs. 2-14.

[4] P. Helbin y M. Baczyński. “Properties of the survival implications and S-implications”. En: *Proc. of the IFSA-EUSFLAT 2015*. Ed. por J. M. Alonso et al. Atlantis Press, 2015, págs. 807-814.


¡Gracias por su atención!